Assimetria de emaranhamento na cadeia XYZ de spin-$\frac{1}{2}$ com gap

Felipe Taha Sant'Ana

Centro de Matemática, Computação e Cognição — Universidade Federal do ABC

O título, parte por parte

Parte 2
assimetria de emaranhamento

Assimetria de **emaranhamento** na **cadeia XYZ de spin-$\frac{1}{2}$** **com gap**

Parte 1
entropia de emaranhamento: Shannon, von Neumann, Rényi

Parte 3
a cadeia de spins XYZ: spins, hamiltonianos, com gap vs sem gap, ordem de Néel, kinks, breathers

Parte 4 — juntando tudo: quanto de uma simetria quebrada é visível dentro de uma janela da cadeia

▸ A pergunta em uma frase: A2

Parte 1 — Entropia de emaranhamento: de Shannon a Rényi

Quanto não sabemos? A entropia de Shannon

Entropia de Shannon das probabilidades $p_1, \ldots, p_N$

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i.$$

Conceitos centrais

- Surpresa e probabilidade: eventos raros trazem mais surpresa (mais informação) quando acontecem; eventos previsíveis ou garantidos não trazem nenhuma.
- Entropia máxima: atingida quando todos os resultados são igualmente prováveis (máxima aleatoriedade ou incerteza).
- Entropia mínima: $H = 0$ para um resultado determinístico (conhecido com certeza).

- Resultado certo ($p_1 = 1$): $H = 0$.
- Moeda honesta: $H = \log 2$ (um *bit*).
- Dado honesto: $H = \log 6$. Em geral, N resultados igualmente prováveis: $H = \log N$.
- Moeda viciada p: $H = -p \log p - (1-p) \log(1-p)$.

Em resumo

H conta, em escala logarítmica, quantas possibilidades igualmente prováveis você efetivamente tem: e^H "resultados efetivos". $H/\log 2$ é o número de bits necessários, em média, para registrar o resultado.

▸ Teorema de Shannon, sequências típicas: A3–A4

Shannon encontra um qubit

Jogo das vinte perguntas com um spin

Quão incerto é um spin? Meça-o e calcule o H de Shannon dos resultados.

	medir em z	medir em x
spin em x ($\rightarrow$)	50/50: **1 bit**	sempre $\rightarrow$: **0 bit**
moeda 50/50 ($\uparrow$ ou $\downarrow$)	50/50: **1 bit**	50/50: **1 bit**

Algo novo

Para um dado, H é uma propriedade do dado. Para um spin, H depende da *pergunta*: o spin $\rightarrow$ é perfeitamente previsível ao longo de x; a moeda nunca é. A entropia quântica deve ser a aleatoriedade que sobra após a melhor pergunta.

O que precisamos a seguir

Uma descrição do estado que responde a *todas* as perguntas de uma vez: a matriz densidade ρ. Sua entropia, a entropia de von Neumann, é o H da melhor pergunta.

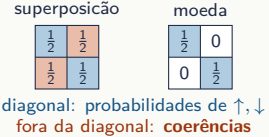
Uma regra clássica que falha

Classicamente, o todo nunca é menos incerto que as partes: $H(AB) \geq H(A)$. Dois spins num singleto: cada um sozinho é uma moeda perfeita, $S_A = \log 2$, mas o par é totalmente conhecido, $S_{AB} = 0$. Essa diferença é o emaranhamento.

Estados mistos e sua entropia

Estado misto: uma moeda sobre estados puros

"↑ ou ↓, 50/50, não sabemos qual" é ignorância clássica sobre a mecânica quântica. A matriz densidade ρ registra ambas.



Mesma diagonal, coerências diferentes

Superposição = estado definido; moeda = ignorância.

Entropia: o que a melhor pergunta deixa

Todo estado tem uma *melhor pergunta* (sua autobase). A entropia de von Neumann é o H de Shannon das respostas, $S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i = -\mathrm{Tr}\rho \log \rho$, com λ_i os autovalores de ρ: são probabilidades.



- Puro: $S = 0$, totalmente conhecido. Chances iguais entre d opções, $\rho = \mathbb{1}/d$: $S = \log d$, o máximo ($d = 2^\ell$ para ℓ spins), em qualquer base.

▸ Qubits, medição, dois spins: A5–A9 ▸ Por que a autobase: A10

O par de Bell: correlações perfeitas sem valores definidos

Tome o singleto $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$.

- Meça A ao longo de z: $\uparrow$ ou $\downarrow$ com probabilidade $\frac{1}{2}$ cada — totalmente aleatório.
- Então B ao longo de z é *sempre* o oposto.
- O mesmo vale em x, em y, em qualquer eixo: o singleto é invariante por rotações, $\vec{S}_A + \vec{S}_B = 0$.

Resultado principal

Cada spin sozinho: maximamente aleatório. O par: perfeitamente correlacionado em toda direção. Variáveis aleatórias clássicas não fazem isso em todas as direções ao mesmo tempo (teorema de Bell).



resultados sempre opostos, cada um 50/50

Analogia

Duas luvas em duas caixas: abra uma e você sabe a outra. *Mas* as luvas já são esquerda/direita antes; o singleto não tem valor prévio em eixo nenhum e, mesmo assim, é correlacionado em todos.

Entropia de emaranhamento: quão mista é uma parte?

O que A sozinho vê

Esqueça B: sobra o estado reduzido $\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho$. Para o singleto, $\rho_A = \mathbb{1}/2$, a moeda do slide 4. O par é puro, $S(\rho) = 0$; a parte é mista, $S_A = S(\rho_A) = \log 2$.

Entropia de emaranhamento

Se o todo é puro, a parte é mista só pelo vínculo com o resto, e S_A mede esse vínculo.



Aqui: A é uma janela de ℓ spins; o todo é o estado fundamental da cadeia.

Outra medida de mistura: duas cópias

$S(\rho_A)$ pede o logaritmo de uma matriz $2^\ell \times 2^\ell$. Mais direto: prepare o estado duas vezes e faça a melhor pergunta a cada cópia. A chance de respostas iguais é $\sum_i \lambda_i^2 = \mathrm{Tr}\rho^2$.

Puro: 1. Chances iguais entre d opções: $1/d$. Então $-\log \mathrm{Tr}\rho^2$ vale 0 e $\log d$, como S nesses extremos.

Com n cópias

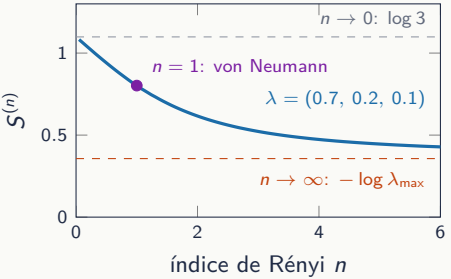
A chance de n respostas iguais é $\mathrm{Tr}\rho^n = \sum_i \lambda_i^n$: um número para cada n, só com produtos de matrizes. Em forma de entropia, são as entropias de Rényi.

▸ Matrizes reduzidas, Schmidt: A11–A15 ▸ Cadeias, leis de área e logarítmica: A16–A17

Entropias de Rényi: uma família indexada por n

Entropia de Rényi de ordem $n > 0$, $n \neq 1$

$$S^{(n)}(\rho) = \frac{1}{1-n} \log \mathrm{Tr}\rho^n = \frac{1}{1-n} \log \sum_i \lambda_i^n.$$



Valores especiais (qualquer estado ρ)

$n \to 0$:	log(número de $\lambda_i > 0$)
$n = 1$:	von Neumann S
$n = 2$:	$-\log \mathrm{Tr}\rho^2$ (pureza) [a]
$n \to \infty$:	$-\log \lambda_{\max}$ [b]

Em resumo

n é um zoom: n pequeno conta os autovalores democraticamente; n grande só olha para o maior.

[a] Pureza $\mathrm{Tr}\rho^2$: $= 1$ só para estados puros, $= 1/d$ para $\mathbb{1}/d$.

[b] $\lambda_{\max}$: o maior autovalor de ρ, para qualquer estado ($= 1$ se puro, $= 1/d$ para $\mathbb{1}/d$).

Parte 2 — Assimetria de emaranhamento

O que é uma simetria?

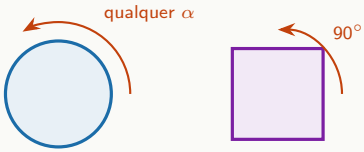
No dia a dia

Um prato redondo parece o mesmo após qualquer rotação em torno do centro: tem simetria de rotação *contínua*. Um quadrado só parece o mesmo após rotações de 90°: uma simetria *discreta*. Uma batata não tem nenhuma.

Mecânica quântica

Uma simetria é uma operação unitária U que deixa o hamiltoniano inalterado:

$$UHU^\dagger = H \quad \Longleftrightarrow \quad [H, U] = 0.$$



Em resumo

As simetrias importam porque cada simetria contínua vem com uma quantidade conservada (teorema de Noether).

Rotações de spins e a carga conservada

Gire cada spin por um ângulo α em torno do eixo z:

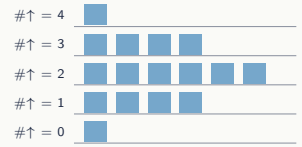
$$U(\alpha) = e^{i\alpha Q}, \qquad Q = \frac{1}{2}\sum_j \sigma_j^z = \#\uparrow - \frac{N}{2}.$$

Q é a carga que gera a rotação (aqui: a magnetização total ao longo de z).

- Q simplesmente *conta* spins para cima.
- Se $[H, Q] = 0$, o número de spins para cima nunca muda na evolução: Q é conservada.

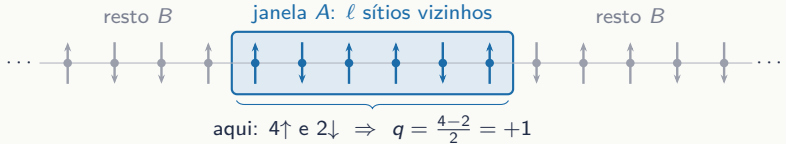
Estante

Organize as 2^N configurações dos spins em prateleiras rotuladas por Q (quantos estão para cima). Um hamiltoniano simétrico nunca move um livro de uma prateleira para outra.



$N = 4$: cada quadrado é uma configuração ($2^4 = 16$ no total); linha = número de spins para cima, i.e. um valor de Q; tamanhos $\binom{4}{\#\uparrow} = 1, 4, 6, 4, 1$.

A carga dentro da janela e os projetores Π_q



Carga da janela

$$Q_A = \frac{1}{2}\sum_{j\in A}\sigma_j^z = \frac{\#\uparrow - \#\downarrow}{2}$$

Só conta os spins *dentro* de A. Valores possíveis: $q = -\frac{\ell}{2}, \ldots, \frac{\ell}{2}$, inteiros para ℓ par. Cada valor de q define um setor de carga.

Medida: $P(Q_A = q) = \mathrm{Tr}(\Pi_q \rho_A)$ é a probabilidade de encontrar carga q na janela.

O projetor Π_q: um filtro de carga

Definição: $\Pi_q = \sum_{s:\, Q_A(s)=q} |s\rangle\langle s|$, soma sobre as configurações s de A com carga q.

O que faz: mantém as componentes com $Q_A = q$ e apaga as outras. Para $\ell = 2$:

$$\Pi_0\big(a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\uparrow\downarrow\rangle + c|\downarrow\uparrow\rangle + d|\downarrow\downarrow\rangle\big) = b|\uparrow\downarrow\rangle + c|\downarrow\uparrow\rangle.$$

Propriedades: $\Pi_q\Pi_{q'} = \delta_{qq'}\Pi_q$, $\sum_q \Pi_q = \mathbb{1}_A$, $Q_A = \sum_q q\,\Pi_q$.

Coerências: a assinatura de uma simetria quebrada

Escreva a matriz densidade da janela na base ordenada por carga. Suas entradas são de dois tipos:

- **dentro de um setor** ($q = q'$): populações e coerências entre estados com o mesmo número de spins para cima;
- **entre setores** ($q \neq q'$): coerências entre cargas diferentes.

Resultado principal

ρ_A é simétrica, $[\rho_A, Q_A] = 0$, se e somente se todas as entradas entre setores se anulam: ρ_A é bloco-diagonal.

Um spin apontando ao longo de x

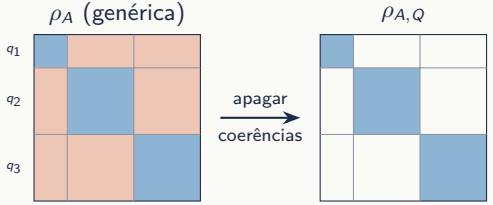
$$|{\rightarrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{\uparrow}\rangle + |{\downarrow}\rangle), \qquad \rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Os $\frac{1}{2}$ fora da diagonal ligam $q = +\frac{1}{2}$ e $q = -\frac{1}{2}$: são eles que fazem o spin apontar ao longo de x, em vez de "para cima ou para baixo ao acaso".

Em resumo

As coerências entre setores de carga *são* a simetria quebrada. Apague-as e a simetria volta.

Estados simétricos e assimétricos



Girando a fotografia

Tire uma foto de uma seta e sobreponha cópias giradas por todos os ângulos: obtém-se um disco sem traços. A média sobre todas as orientações apaga a direção e guarda só o que é invariante por rotação.

Estado simetrizado

$$\rho_{A,Q} = \sum_q \Pi_q \, \rho_A \, \Pi_q = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \, e^{-i\alpha Q_A} \rho_A \, e^{i\alpha Q_A}.$$

- Blocos azuis (mesmo setor) são mantidos; blocos laranja (coerências entre cargas diferentes) são zerados.
- $[\rho_{A,Q}, Q_A] = 0$: simétrica por construção.
- Mesma estatística de carga: $\mathrm{Tr}(\Pi_q \rho_{A,Q}) = \mathrm{Tr}(\Pi_q \rho_A)$, por $\Pi_q^2 = \Pi_q$ e ciclicidade.
- $\rho_{A,Q}$ é a melhor aproximação simétrica de ρ_A: mesma estatística de carga, nenhuma coerência entre cargas.

Definição da assimetria de emaranhamento

Assimetria de emaranhamento de Rényi [Ares, Murciano, Calabrese 2023]

$$\Delta S_A^{(n)} = S^{(n)}(\rho_{A,Q}) - S^{(n)}(\rho_A) = \frac{1}{1-n} \log \frac{\mathrm{Tr}\rho_{A,Q}^n}{\mathrm{Tr}\rho_A^n}.$$

Duas propriedades:

1. $\Delta S_A^{(n)} \geq 0$ para todo n;
2. $\Delta S_A^{(n)} = 0$ se e somente se $[\rho_A, Q_A] = 0$.

Logo, é uma *medida da quebra de simetria dentro de A*.

Em resumo

Apagar coerências deixa o estado mais "espalhado". Se o estado não tinha coerências entre setores de carga, nada muda e a assimetria é zero. Quanto mais coerência, maior o ganho de entropia.

▸ Positividade: A18–A20

Exemplo: um único spin

Spin inclinado por um ângulo ϑ de z em direção a x:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\vartheta}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\vartheta}{2}|\downarrow\rangle.$$

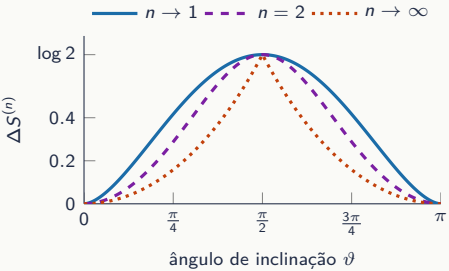
$Q = \frac{1}{2}\sigma^z$ tem setores $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$. Apagando as entradas fora da diagonal de $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$:

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} \\ \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} & \sin^2\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix},$$

$$\rho_Q = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\vartheta}{2} & 0 \\ 0 & \sin^2\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}.$$

O estado é puro, $S^{(n)}(\rho) = 0$: a assimetria é a entropia de Rényi das duas probabilidades que restam na diagonal,

$$\Delta S^{(n)} = \frac{1}{1-n}\log\left[\cos^{2n}\frac{\vartheta}{2} + \sin^{2n}\frac{\vartheta}{2}\right].$$



Em resumo

Ao longo de $\pm z$ ($\vartheta = 0, \pi$): simétrico, $\Delta S = 0$. Ao longo de x ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$): $\Delta S = \log 2$ para todo n. Um único spin tem só dois setores de carga e nunca guarda mais que $\log 2$ de assimetria: para encontrar mais, precisamos de muitos spins.

Resumo da Parte 2

O que lembrar

- Uma carga conservada Q organiza os estados em setores; uma ρ_A simétrica é bloco-diagonal.
- As coerências entre setores são a simetria quebrada.
- $\rho_{A,Q}$: apague-as (média sobre todas as rotações).
- $\Delta S_A^{(n)} = S^{(n)}(\rho_{A,Q}) - S^{(n)}(\rho_A) \geq 0$, zero sse simétrica.
- Distribuição de carga gaussiana larga $\Rightarrow \Delta S \simeq \frac{1}{2} \log \mathrm{Var}(Q_A) \sim \frac{1}{2} \log \ell$.

Ponte para a Parte 3

Para calcular ΔS_A num sistema de muitos corpos real, precisamos de uma cadeia cuja simetria esteja *quase* presente, de um estado fundamental e de um modo de calcular $\mathrm{Var}(Q_A)$. A Parte 3 apresenta essa cadeia: o modelo XYZ, seu gap, sua ordem de Néel, seus kinks e breathers.

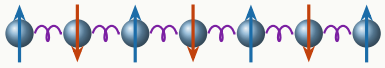
Parte 3 — A cadeia XYZ de spin-$\frac{1}{2}$ com gap

O que é uma cadeia de spins, e por que estudá-la?

- Em muitos cristais, íons magnéticos interagem fortemente numa direção e fracamente nas outras: ímãs unidimensionais (p. ex. $KCuF_3$, Cs_2CoCl_4, $SrCuO_2$).
- Cada íon tem spin-$\frac{1}{2}$: o bit quântico da Parte 1.
- Cadeias também são *construídas* átomo por átomo: íons aprisionados, átomos de Rydberg, qubits.

A razão do teórico

Em 1D, problemas fortemente interagentes muitas vezes têm solução *exata*: cadeias de spins são o átomo de hidrogênio da física de muitos corpos.



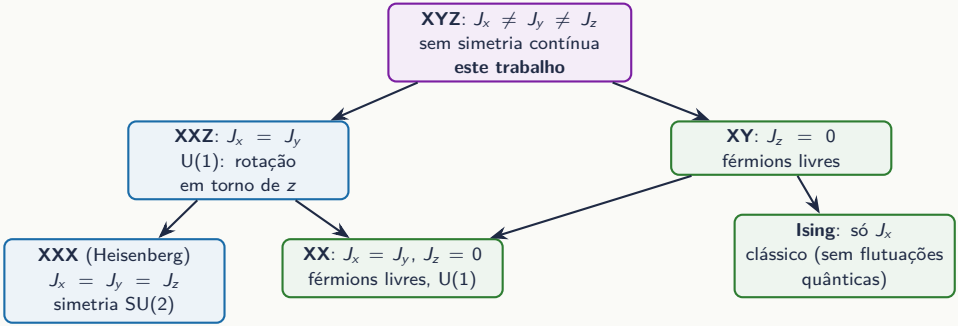
spins numa linha, acoplados aos vizinhos

Atenção

"Spin-$\frac{1}{2}$": dois estados por sítio, $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$. "Cadeia": sítios numa linha, acoplados só aos primeiros vizinhos.

▸ Hamiltoniano, troca: A21–A22

A família de cadeias de spins



Em resumo

Cada seta iguala ou zera acoplamentos e ganha simetria ou simplicidade. A cadeia XYZ está no topo: a cadeia de spin-$\frac{1}{2}$ de primeiros vizinhos mais geral, com eixos alinhados aos acoplamentos, e ainda exatamente solúvel (Baxter 1971).

O modelo: a cadeia de spins XYZ

$$H = \sum_j \Big[\underbrace{(1+\gamma)\,\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + (1-\gamma)\,\sigma_j^y \sigma_{j+1}^y}_{\text{hopping} + \gamma\times\text{criação de pares}} + \underbrace{\Delta_z\,\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z}_{\text{interação}} \Big], \qquad |\Delta_z| < 1, \quad 0 < \gamma \ll 1$$

Com $\sigma^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$, os dois primeiros termos são

$$2\big(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \text{h.c.}\big) + 2\gamma\big(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ + \text{h.c.}\big).$$

- Coeficiente positivo favorece o *anti*-alinhamento; o maior é $1+\gamma$: vizinhos preferem apontar em sentidos opostos em x.
- $\gamma =$ anisotropia x/y: o termo que quebra a simetria de rotação em torno de z.
- Δ_z: spins invertidos vizinhos se repelem ($\Delta_z > 0$) ou se atraem ($\Delta_z < 0$).

parâmetros	nome
$\gamma = 0,\ \Delta_z = 1$	Heisenberg (isotrópico)
$\gamma = 0,\ \lvert\Delta_z\rvert < 1$	XXZ: referência simétrica
$\gamma > 0,\ \Delta_z = 0$	XY (férmions livres)
$\gamma > 0,\ \Delta_z \neq 0$	**XYZ (este trabalho)**

Por que este modelo

Interagente para $\Delta_z \neq 0$ e, mesmo assim, exatamente solúvel na rede. γ pequeno: simetria pouco quebrada, gap pequeno, comprimento de correlação longo.

▸ Termos, simetria e γ: A23–A25

O espectro de energia de uma cadeia

- O hamiltoniano tem uma lista de energias permitidas $E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \ldots$
- E_0: o estado fundamental — o estado da cadeia a temperatura zero.
- Os demais são excitações. Em baixa energia, em geral parecem *partículas* que viajam pela cadeia com momento p e energia $\varepsilon(p)$: quasipartículas.

Gap de energia

$$\Delta_{\text{gap}} = \lim_{N\to\infty} (E_1 - E_0),$$

ignorando estados fundamentais degenerados.

Quasipartículas

Uma "ola" num estádio lotado percorre as arquibancadas sem que ninguém saia do lugar. As excitações de uma cadeia de spins são assim: perturbações coletivas que se movem e carregam energia como partículas.

Em resumo

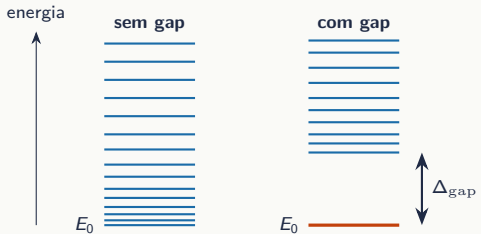
Duas possibilidades quando a cadeia fica infinita: o gap continua finito (com gap) ou vai a zero (sem gap). Essa única distinção controla quase todo o resto.

O que significa “com gap”

- **Com gap**: $\Delta_{\mathrm{gap}} > 0$. Excitar a cadeia custa pelo menos uma quantidade finita de energia, por mais longa que seja a cadeia.
- **Sem gap**: existem excitações de energia arbitrariamente baixa; os níveis se fundem num contínuo que começa em E_0.

Por que importa

Em qual dos dois casos estamos decide até onde vão as correlações (próximos slides), quão emaranhada é uma janela (lei de área) e se a assimetria pode ser calculada (Parte 4).



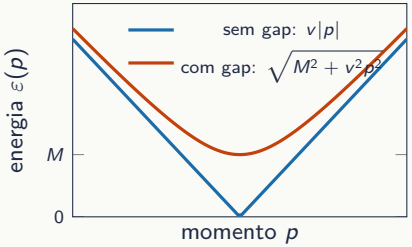
Quasipartículas: sem massa versus com massa

Relação de dispersão $\varepsilon(p)$

- **Sem gap**: $\varepsilon = v|p|$, como a luz ou o som.
- **Com gap**: $\varepsilon = \sqrt{M^2 + v^2 p^2}$, a relação de Einstein para massa M; a velocidade das ondas de spin v faz o papel da "velocidade da luz". Nunca abaixo de M.

Massa versus gap

M: energia de repouso de *uma* quasipartícula ($v = 1$); $1/M$: seu tamanho em sítios. Na cadeia XYZ, a quasipartícula é o kink (M calculada adiante). Kinks nascem em pares: o gap da cadeia é $2M$ (um pouco menos quando dois se ligam).



Em resumo

As mesmas duas formas da relatividade: uma partícula sem massa e uma com massa.

▸ Quasipartículas com e sem massa: A26

O comprimento de correlação

Comprimento de correlação ξ

Num estado fundamental com gap, as correlações conexas decaem como

$$\langle O_i O_j \rangle - \langle O_i \rangle \langle O_j \rangle \sim e^{-|i-j|/\xi}, \qquad \xi \simeq \frac{v}{\Delta_{\text{gap}}}.$$

Por que $\xi \sim v/\Delta$ (incerteza)

Uma excitação virtual de energia $\geq \Delta$ só vive por um tempo $\sim 1/\Delta$; movendo-se com velocidade v, percorre no máximo $\sim v/\Delta$. Além dessa distância, dois spins não conseguem "trocar mensagens".

O que ξ significa

ξ é o tamanho da "vizinhança" que cada spin conhece. Perturbe um spin: o efeito sobre o estado fundamental só é sentido a $\sim \xi$ sítios.

Na cadeia XYZ

$\xi \simeq 1/M$ em unidades da rede. Com γ pequeno, o gap é minúsculo e ξ é longo (dezenas a centenas de sítios): o regime em que uma teoria de campos no contínuo descreve a cadeia.

▸ Exponencial vs lei de potência: A27

Com gap versus sem gap

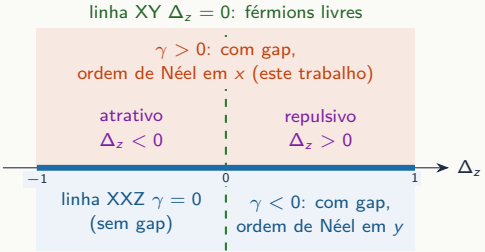
	sem gap	com gap
menor excitação	arbitrariamente barata	custa pelo menos $\Delta = M$
quasipartículas	sem massa, $\varepsilon = v\|p\|$	com massa, $\varepsilon = \sqrt{M^2 + v^2 p^2}$
correlações	lei de potência r^{-2x}	exponencial $e^{-r/\xi}$
compr. de correlação	infinito	$\xi \sim v/M$
invariância de escala	sim (teoria de campos conforme)	não: ξ fixa uma escala
emaranhamento do bloco	$\frac{c}{3} \log \ell$	satura (lei de área)
no computador (MPS)	custo cresce com ℓ	barato: dim. de ligação finita
exemplos	XX, XXZ ($\|\Delta\| \leq 1$), Ising ($h = 1$)	Ising $h \neq 1$, **XYZ**

Em resumo

"Com gap" nos fornece: correlações de curto alcance, flutuações de carga gaussianas, ξ finito — é isso que torna a assimetria calculável.

▸ Exemplos XX e Ising: A28–A29

Onde a cadeia XYZ tem gap



Quão rápido o gap fecha

O expoente $\pi/(2\theta_0)$ varia muito com Δ_z: reduzir γ à metade divide a massa por $2^{\pi/(2\theta_0)}$. No lado repulsivo o gap fecha mais rápido que linearmente, e o comprimento de correlação cresce depressa quando $\gamma \to 0$. Em $\Delta_z = 0$ o expoente é 1: na linha XY, $M = \operatorname{atanh}\gamma \simeq \gamma$.

- Linha $\gamma = 0$, $|\Delta_z| < 1$: a cadeia XXZ. Conserva Q e é **sem gap**; sua física de baixa energia é um "líquido de Luttinger", um bóson livre.
- Qualquer $\gamma > 0$ **abre um gap**. O gap fecha quando $\gamma \to 0$ como uma potência de γ cujo expoente depende de Δ_z:

$$M \propto \gamma^{\pi/(2\theta_0)}, \qquad \theta_0 = \arccos \Delta_z \in (0, \pi).$$

  O prefator também é conhecido: com $\beta^2 = 1 - \theta_0/\pi$, $M \to \left(\gamma 4^{1-2\beta^2} / \sin^2\theta_0\right)^{\pi/(2\theta_0)}$.
- Linha vertical $\Delta_z = 0$: a cadeia XY, de férmions livres. À esquerda, $\Delta_z < 0$, o lado **atrativo**; à direita, $\Delta_z > 0$, o **repulsivo**: o sinal da interação entre spins para cima e, como veremos, entre kinks.

▸ XYZ sem gap?: A30

Quebra explícita e quebra espontânea de simetria

Quebra explícita

As regras (o hamiltoniano) não são simétricas: $[H, U] \neq 0$.



Mesa inclinada: a própria mesa tem uma direção preferida.

Quebra espontânea

As regras são simétricas, $[H, U] = 0$, mas o estado fundamental não: ele escolhe uma de várias opções equivalentes, trocadas por U.



Poço duplo simétrico: a bola fica em um de dois mínimos.

Na cadeia XYZ: as duas, uma após a outra

- γ quebra explicitamente a $U(1)$ contínua de rotação em torno de z: está em H. Resta só a $\mathbb{Z}_2$ (rotação de π).
- O estado fundamental quebra espontaneamente essa $\mathbb{Z}_2$: escolhe um de dois padrões de Néel, trocados pela rotação de π.

O que a assimetria vê

A assimetria mede quanto a janela quebra a $U(1)$. O crescimento $\frac{1}{2}\log \ell$ vem da quebra explícita; num vácuo definido, a $\mathbb{Z}_2$ quebrada espontaneamente contribui com $\log 2$.

Quebra espontânea: dois vácuos de Néel

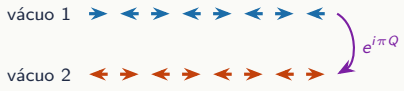
- O acoplamento mais forte é $(1+\gamma)\sigma^x\sigma^x > 0$: vizinhos se anti-alinham ao longo de x. A imagem clássica é o padrão **Néel**-x $\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\cdots$. (em homenagem a Louis Néel (Nobel de 1970)
- A rotação de π em torno de z leva $\sigma^x \to -\sigma^x$; logo, leva $\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\cdots$ em $\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\cdots$. Mesma energia.
- Numa cadeia infinita, o verdadeiro estado fundamental escolhe *um* deles (um "vácuo").

Parâmetro de ordem

A magnetização alternada

$$m_s = \frac{1}{N}\sum_j (-1)^j \langle \sigma_j^x \rangle.$$

$m_s \neq 0$: ordem de Néel. $m_s = 0$: sem ordem.



Dois tipos de quebra

$U(1)$ é quebrada *explicitamente* por γ (em H).
$\mathbb{Z}_2$ é quebrada *espontaneamente* (pelo estado, não por H).

Por que precisa de γ

Em 1D, uma simetria *contínua* não se quebra espontaneamente (Mermin–Wagner, Coleman): a XXZ com $|\Delta_z| < 1$ não tem ordem de Néel. Com $\gamma > 0$ resta só uma $\mathbb{Z}_2$ discreta, que *pode* se quebrar.

▸ Duas quebras de simetria; vácuos: A31–A32

Kinks: paredes entre os dois vácuos



- Um **kink** (parede de domínio) separa uma região do vácuo 1 de uma região do vácuo 2.
- Seu custo de energia está localizado perto da parede; a mecânica quântica deixa a parede se mover, então o kink é uma **partícula** com momento p e energia $E(p)$.
- Para momento baixo, $E(p) = \sqrt{\Delta_{\mathrm{gap}}^2 + v^2 p^2}$ (forma relativística). Chamamos $M \equiv \Delta_{\mathrm{gap}}/v$ de **massa do kink**; em unidades $v = 1$, é ao mesmo tempo uma energia e um *inverso de comprimento*.

Topológico

Um kink não pode ser removido por uma mudança local: longe à esquerda vê-se o vácuo 1, longe à direita, o vácuo 2. Com o mesmo vácuo nas duas pontas, os kinks vêm em **pares** (kink + antikink).

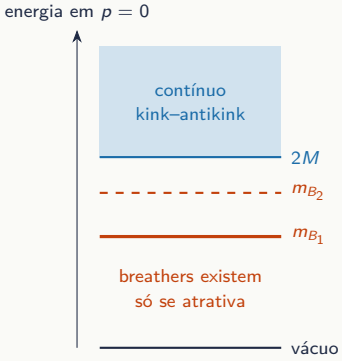
Unidades

Aqui M é o inverso de um comprimento de correlação em unidades da rede: $1/M$ é o "tamanho" de um kink em sítios.

▸ Kinks em detalhe: A33

Pares de kinks, e estados ligados chamados breathers

- Kink e antikink interagem. O sinal da interação é controlado por Δ_z:
  - $\Delta_z < 0$: **atrativa**. Podem se ligar em **breathers** $B_1, B_2, \ldots$, mais leves que $2M$.
  - $\Delta_z > 0$: **repulsiva**. Sem estados ligados; só o contínuo de pares livres a partir de $2M$.
  - $\Delta_z = 0$: sem interação (férmions livres).
- Um breather não tem "parede" líquida: começa e termina no mesmo vácuo, então pode ser criado localmente.



Por que nos importa

A carga quebrada Q flutua porque o estado fundamental cria e destrói sem parar pares virtuais de kinks e breathers. Contá-los (Parte 4, Passo 2) dá χ_{zz}.

▸ Breathers em detalhe: A34–A35

Da cadeia de spins a um campo: o modelo de sine-Gordon



Afastando o zoom

1. **Quando:** $\gamma \ll 1 \Rightarrow \xi \sim 1/M \gg 1$ sítio. A longas distâncias só importam modos lentos, de comprimento de onda longo.
2. $\gamma = \Delta_z = 0$**:** férmions livres. Perto de $\pm k_F$ a dispersão é linear, e pares partícula–buraco são ondas de densidade: um bóson livre ϕ (os dois primeiros termos de $\mathcal{H}$, à direita).
3. $\Delta_z \neq 0$**:** a longas distâncias só muda a rigidez (e a velocidade) do bóson: $\beta^2 = 1 - \arccos(\Delta_z)/\pi$ (pelo ansatz de Bethe).
4. **Limite de escala** ($\gamma \to 0$ com $M\ell$ fixo): a rede sobrevive só em $\beta^2(\Delta_z)$ e $\mu = \gamma\,\mathcal{C}(\Delta_z)$.

Correspondência

$\frac{1}{2}\sigma_j^z \quad \to \frac{2}{\beta}\,\Pi(x) + \ldots$ (densidade de carga)

$\sigma_j^+ \quad \to (-1)^j\, e^{i\beta\phi/2}$ ($(-1)^j$: $2k_F = \pi$)

$\sigma_j^+\sigma_{j+1}^+ \to e^{i\beta\phi}$ (uniforme: $(-1)^j(-1)^{j+1} = -1$)

termo $\gamma \to -2\mu \int \mathrm{d}x \cos\beta\phi, \quad \mu = \gamma\,\mathcal{C}(\Delta_z)$

Resultado: sine-Gordon

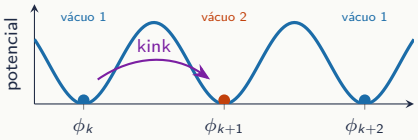
$$\mathcal{H} = \int \mathrm{d}x \left[4\pi\Pi^2 + \frac{1}{16\pi}(\partial_x\phi)^2 - 2\mu\cos\beta\phi \right]$$

$[\phi(x), \Pi(y)] = i\delta(x-y)$. $\cos\beta\phi$ tem dimensão $2\beta^2 < 2$: *relevante*, gap para todo $\gamma > 0$, $M \propto \mu^{1/(2-2\beta^2)} \propto \gamma^{\pi/2\theta_0}$.

▸ Limite do contínuo, bosonização, kink: A36–A38

Rede $\leftrightarrow$ sine-Gordon, e as partículas

cadeia XYZ	sine-Gordon
rotação $e^{i\alpha Q}$ em torno de z	translação $\phi \to \phi + 2\alpha/\beta$
$\gamma = 0$: todo α, $U(1)$	$\mu = 0$: toda translação
$\gamma > 0$: só $\alpha = \pi$, $\mathbb{Z}_2$	$\mu > 0$: só translações de $2\pi/\beta$
dois vácuos Néel-x	mínimos vizinhos ϕ_k, ϕ_{k+1}
kink (parede de domínio)	sóliton de ϕ_k a ϕ_{k+1}
energia de um kink/v	massa do kink M



O acoplamento renormalizado

$$\xi_{\mathrm{sG}} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{\pi}{\theta_0} - 1.$$

$\xi_{\mathrm{sG}} < 1$	atrativo ($\Delta_z < 0$), breathers
$\xi_{\mathrm{sG}} = 1$	férmions livres ($\Delta_z = 0$)
$\xi_{\mathrm{sG}} > 1$	repulsivo ($\Delta_z > 0$)

Espectro quântico

Kink e antikink de massa M; para $\xi_{\mathrm{sG}} < 1$, breathers

$$m_{B_n} = 2M \sin \frac{n\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2}, \quad n < 1/\xi_{\mathrm{sG}}.$$

Exatamente solúvel: o que a “integrabilidade” nos dá

- **Na rede**: Baxter (1971–72) mostrou que o hamiltoniano XYZ comuta com a matriz de transferência de um modelo clássico 2D (o modelo de oito vértices) e o resolveu. Johnson, Krinsky e McCoy (1973) extraíram o espectro de excitações: a massa do kink M numa fórmula fechada em funções elípticas.
- **No contínuo**: sine-Gordon também é integrável. Zamolodchikov & Zamolodchikov (1979): espalhamento de kinks e breathers. Lukyanov (1997): fatores de forma em forma fechada — como um operador local cria kinks e breathers a partir do vácuo.

Por que isso importa aqui

A assimetria depende de $\chi_{zz} = M\,\mathfrak{c}(\beta^2)$. A integrabilidade dá M na rede e dá as peças de $\mathfrak{c}$ no contínuo.

Atenção

A integrabilidade não entrega a assimetria diretamente; o trabalho é reduzi-la a quantidades que ela fornece.

Resumo da Parte 3

O que lembrar

- XYZ: três acoplamentos diferentes em x, y, z; γ quebra explicitamente a rotação em torno de z; Δ_z é a interação.
- Com gap para $\gamma > 0$: quasipartículas com massa, correlações exponenciais, $\xi \sim 1/M$.
- Estado fundamental: um de dois vácuos Néel-x (quebra espontânea de $\mathbb{Z}_2$).
- Excitações: kinks (paredes entre vácuos) e, se $\Delta_z < 0$, breathers (kinks ligados).
- A longas distâncias: a teoria de campos de sine-Gordon, exatamente solúvel.

Ponte para a Parte 4

Agora temos todas as peças do título:

- **assimetria de emaranhamento**: uma medida de simetria quebrada numa janela;
- **com gap**: correlações de curto alcance;
- **cadeia XYZ de spin-$\frac{1}{2}$**: o modelo, seus vácuos e partículas.

Na Parte 4 juntamos todos esses blocos de construção.

Parte 4 — Montando o quebra-cabeça com os blocos de construção

Assimetria de emaranhamento na cadeia XYZ de spin-$\frac{1}{2}$ com gap

Assimetria de emaranhamento

Quanto uma janela de ℓ spins quebra a simetria de rotação em torno de z: a entropia ganha ao apagar as coerências entre setores de carga (Parte 2).

Com gap

Quasipartículas com massa, correlações exponenciais, comprimento de correlação finito $\xi \sim 1/M$ (Parte 3).

Cadeia XYZ de spin-$\frac{1}{2}$

Três acoplamentos diferentes; γ quebra a simetria explicitamente; vácuos Néel-x; kinks e breathers (Parte 3).

A pergunta que fazemos

Para uma janela de ℓ spins no estado fundamental, quanto vale $\Delta S_A^{(n)}(\ell)$ para uma cadeia *interagente*?

Quem tem qual simetria: o hamiltoniano e o estado

A régua: rotações em torno de z, o grupo $U(1)$

$U(\alpha) = e^{i\alpha Q}$, com $Q = \frac{1}{2}\sum_j \sigma_j^z$. É simetria da cadeia XXZ ($\gamma = 0$), *não* da XYZ. Mesmo assim serve de régua: a assimetria pergunta quão longe um estado está de ser invariante por esse grupo.

operação	H da XXZ	H da XYZ	estado: um vácuo Néel-x
rotação de qualquer α em torno de z: $U(1)$	✓	× quebra **explícita**, por γ	×
rotação de π em torno de z: $\mathbb{Z}_2$	✓	✓	× quebra **espontânea**
rotação de π em torno de x	✓	✓	✓
translação de um sítio	✓	✓	× troca os dois vácuos

Por que γ deixa só a $\mathbb{Z}_2$

O termo $\gamma\,(\sigma_j^+\sigma_{j+1}^+ + \text{h.c.})$ muda Q de ± 2. Sob $U(\alpha)$ ele ganha $e^{\pm 2i\alpha}$, que só vale 1 em $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$. Q deixa de ser conservada; a paridade de Q, não.

O estado que consideramos

O estado fundamental superpõe valores diferentes de Q (pares criados por γ) e fica em *um* dos dois vácuos, trocados pela rotação de π. Logo $[\rho_A, Q_A] \neq 0$.

O que a assimetria mede aqui: nada é quebrado para medir

O procedimento

1. Tome ρ_A como ele é: a janela no estado fundamental.
2. Apague as coerências entre setores de Q_A (média sobre as rotações em torno de z): $\rho_{A,Q}$.
3. $\Delta S_A = S(\rho_{A,Q}) - S(\rho_A)$: a entropia ganha.

A quebra já está em H e no estado; a assimetria só mede quanto havia para apagar.



um vácuo



estado "gato"



$\rho_{A,Q}$

Blocos: setores de carga. Laranja: coerências entre setores.

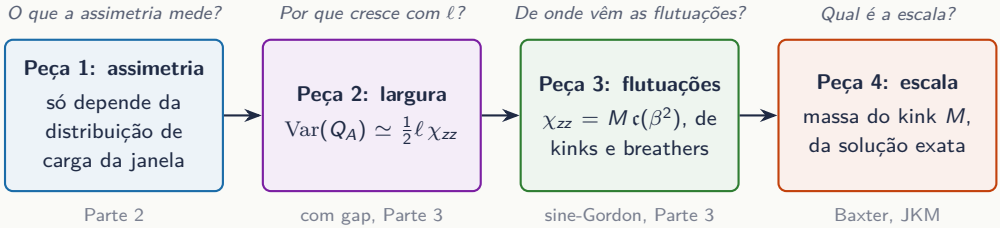
Qual quebra aparece onde

- **Explícita (γ):** a carga da janela tem distribuição gaussiana de largura $\propto \sqrt{\ell}$. Daí o $\frac{1}{2}\log \ell$. Quando $\gamma \to 0$, $\Delta S_A \to 0$.
- **Espontânea ($\mathbb{Z}_2$):** só uma constante, $\log 2$. Num vácuo há coerências entre cargas pares e ímpares; no estado "gato" (soma dos dois vácuos), só entre cargas de mesma paridade: menos a apagar.

Discreta versus contínua

Um grupo finito dá no máximo $\log |G|$ ($\log 2$ para a $\mathbb{Z}_2$). Só uma simetria contínua dá um termo que cresce com ℓ.

Como as peças se encaixam



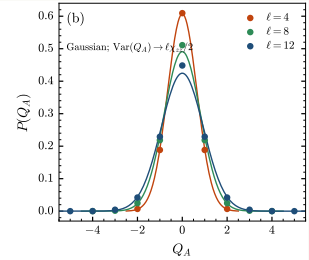
A ideia

A assimetria é uma pergunta sobre *coerências*. Peça por peça, ela vira uma pergunta sobre *partículas*: quantos pares de kinks o estado fundamental cria, e quanto eles custam.

Peça 1: a assimetria só vê a distribuição de carga

A ideia

- Apagar coerências = média sobre todas as rotações da janela (slide 12).
- Girada por α, a janela se sobrepõe à original com $Z_2(\alpha) = \mathrm{Tr}[\rho_A e^{i\alpha Q_A} \rho_A e^{-i\alpha Q_A}]/\mathrm{Tr}\rho_A^2 \approx e^{-V\alpha^2}$, onde $V \simeq \mathrm{Var}(Q_A)$: a largura da distribuição de carga.
- Distribuição larga $\Rightarrow$ cópia girada logo distinguível $\Rightarrow$ assimetria grande.



$P(Q_A = q) = \mathrm{Tr}(\Pi_q \rho_A)$: probabilidade de medir $Q_A = q$ na janela, para $\ell = 4, 8, 12$ em $(\Delta_z, \gamma) = (0.3, 0.2)$. Gaussianas que se alargam com ℓ.

Resultado da Peça 1

$$\Delta S_A^{(n)} \simeq \frac{1}{2} \log\left(2\pi\, \mathrm{Var}(Q_A)\right) + \frac{\log n}{2(n-1)}$$

Como a entropia de uma gaussiana: o log da sua largura.

▸ Derivação: projetores, momentos carregados, réplicas: A39–A50

Peça 2: o que é χ_{zz}, fisicamente?

Flutuação de carga por sítio

$$\chi_{zz} = \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Big(\langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle - \langle \sigma_0^z \rangle \langle \sigma_r^z \rangle \Big),$$

$$\mathrm{Var}(Q_A) \simeq \frac{\ell}{2}\, \chi_{zz}.$$

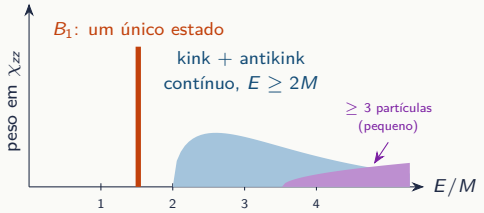
- $Q_A = \frac{1}{2} \sum_{j \in A} \sigma_j^z$; logo $\mathrm{Var}(Q_A) = \frac{1}{4} \sum_{i,j \in A} \langle \sigma_i^z \sigma_j^z \rangle_c$.
- Numa cadeia com gap, as correlações se anulam além de $\sim \xi$; então a soma dupla é ℓ vezes a soma sobre a distância $r = i - j$: $\mathrm{Var}(Q_A) \simeq \frac{\ell}{4} \sum_r \langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_c$.

Em resumo

Se o estado conservasse Q, o número de spins para cima numa janela ainda flutuaria, mas a cadeia inteira teria Q definido. Aqui o estado cria e destrói pares de spins para cima sem parar (termo γ): χ_{zz} mede quanto essa contagem "ferve" por unidade de comprimento.

Peça 3: como calcular χ_{zz}

1. **Afastar o zoom.** Com γ pequeno, o comprimento de correlação $1/M$ cobre muitos sítios. A física de longas distâncias esquece os detalhes da rede e é descrita por uma teoria quântica de campos no contínuo (*universalidade*). Aqui: o modelo de **sine-Gordon**.
2. **Contar flutuações.** Escreva χ_{zz} como soma sobre estados excitados (pares de kinks, breathers, ...), cada um com um peso conhecido ("fator de forma").
3. Q não é conservada: o termo γ cria e destrói pares de spins para cima o tempo todo. Cada processo "empresta" por um instante um estado excitado $|n\rangle$: um par kink–antikink ou um breather.



Quanto cada energia contribui para χ_{zz} (esboço, $\Delta_z < 0$). A área total é χ_{zz}.

Regra de soma

$$\chi_{zz} = \frac{2}{L} \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle n|\dot{Q}|0\rangle|^2}{E_n^2}$$

(amplitude para criar $|n\rangle)^2$ / (custo de energia)^2: todo termo é positivo, e os estados leves dominam.

▸ Aquecimento: a cadeia XY: A53–A55 ▸ Regra de soma, kinks, breather: A56–A72 ▸ Massa do kink (JKM): A73–A75

Visão geral: as peças juntas

Assimetria de emaranhamento na cadeia XYZ de spin-$\frac{1}{2}$ com gap

$$\Delta S_A^{(n)}(\ell) = \frac{1}{2}\log\left(\pi \ell\, \chi_{zz}\right) + \frac{\log n}{2(n-1)},$$

$$\chi_{zz} = M\, \mathfrak{c}(\beta^2).$$

- $\frac{1}{2}\log \ell$: uma simetria *contínua* quebrada, vista por uma janela (Parte 2).
- $\frac{\log n}{2(n-1)}$: geometria das réplicas, a mesma para toda cadeia com gap (Parte 1).
- χ_{zz}: susceptibilidade, específica do modelo (Parte 3).

O que é novo

- A primeira assimetria numa cadeia com gap *interagente*.
- Só a variância da carga importa, para qualquer cadeia com gap com flutuações de carga gaussianas.
- χ_{zz} calculado a partir de kinks e breathers de sine-Gordon, com a massa da rede (JKM).

▸ Perspectivas, computação quântica, glossário: A100–A104 ▸ Fórmula mestra: A51–A52 ▸ Numérica: A76–A99

Conteúdo do apêndice

A. Abertura e Parte 1 em detalhe

A2 A pergunta em uma frase (slide 1)

A3–A4 Teorema de Shannon, sequências típicas (slide 2)

A5–A9 Qubits, medição, dois spins (slide 4)

A10 Por que a autobase (slide 4)

A11–A15 Matrizes reduzidas, Schmidt (slide 6)

A16–A17 Cadeias, leis de área e logarítmica (slide 6)

B. Assimetria de emaranhamento em detalhe

A18–A20 Positividade (slide 13)

C. A cadeia XYZ em detalhe

A21–A22 Hamiltoniano, troca (slide 16)

A23–A25 Termos, simetria e γ (slide 18)

A26 Quasipartículas com e sem massa (slide 21)

A27 Exponencial vs lei de potência (slide 22)

A28–A29 Exemplos XX e Ising (slide 23)

A30 XYZ sem gap? (slide 24)

A31–A32 Duas quebras de simetria; vácuos (slide 26)

A33 Kinks em detalhe (slide 27)

A34–A35 Breathers em detalhe (slide 28)

A36–A38 Contínuo, bosonização, kink (slide 29)

D. Derivações por trás da Parte 4

A39 Projetor como integral de Fourier (slide 37)

A40 Momento carregado ($n = 2$) (slide 37)

A41 Expansão para ângulos pequenos (slide 37)

A42 Ângulos pequenos: a largura V (slide 37)

A43–A44 V vs variância, férmions livres (slide 37)

A45 Avaliação gaussiana (sela) (slide 37)

A46 Ângulos perto de $\pm\pi$ (slide 37)

A47 Rényi geral: n réplicas (slide 37)

A48–A50 Larguras de réplica, integral gaussiana (slide 37)

A51 A fórmula mestra (slide 40)

A52 Universal vs específico do modelo (slide 40)

A53–A55 Aquecimento: a cadeia XY (slide 39)

A56 Flutuações como soma sobre estados (slide 39)

A57–A63 Espectro, rapidezes, fatores de forma (slide 39)

A64–A72 Dois kinks, breather, corredor, caudas (slide 39)

A73 A receita de JKM para a massa do kink (slide 39)

A74–A75 Ferramentas elípticas, breather (slide 39)

E. Confirmação numérica (iDMRG)

A76–A99 Confirmação numérica (iDMRG) (slide 40)

F. Perspectivas e glossário

A100–A104 Perspectivas, comp. quântica, glossário (slide 40)

◂ Voltar ao slide 1

Apêndice A — Abertura e Parte 1 em detalhe

A pergunta em uma frase

Um ímã quântico está no seu estado de menor energia. Uma simetria de rotação está quase presente, mas não totalmente. Se olharmos só para uma janela de ℓ spins vizinhos,

quanto dessa simetria está faltando?

O que vamos obter

Uma fórmula válida para janelas longas,

$$\Delta S_A^{(n)}(\ell) = \frac{1}{2}\log(\pi\,\ell\,\chi_{zz}) + \frac{\log n}{2(n-1)} + \dots$$

e um modo de calcular o único número χ_{zz} de que ela precisa.

Três ingredientes

1. Estatística das flutuações de carga (qualquer cadeia com gap).
2. Uma teoria de campos (sine-Gordon) dá χ_{zz}/M.
3. A solução de Baxter na rede (via JKM) dá M em forma fechada.

Teorema de Shannon: por que $-\sum_i p_i \log p_i$

Três requisitos para $H(p_1, \ldots, p_N)$

1. contínua nas p_i;
2. para probabilidades iguais, $H_N = H(\frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N})$ cresce com N;
3. agrupamento: decompor um resultado em sub-resultados soma a incerteza média dos sub-resultados.

Teorema (Shannon 1948)

A única função assim é $H = -K \sum_i p_i \log p_i$, $K > 0$ (unidades).

Demonstração em três passos

1. NM resultados iguais em N grupos de M: $H_{NM} = H_N + H_M$. Uma função crescente e aditiva dos inteiros é $H_N = K \log N$.
2. $p_i = n_i/N$ racionais: agrupe N resultados iguais em blocos de tamanhos n_i, $K \log N = H(p) + \sum_i p_i K \log n_i$; logo $H(p) = -K \sum_i p_i \log p_i$.
3. p_i reais: por continuidade.

◂ Voltar ao slide 2 ▸ Conteúdo

O que H conta: sequências típicas

Lei dos grandes números

Sorteie n resultados independentes. A probabilidade da sequência é um produto; logo

$$-\frac{1}{n}\log p(x_1,\ldots,x_n) = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log p_{x_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} H.$$

Quase toda a probabilidade está nas sequências típicas, cada uma com probabilidade $\approx e^{-nH}$, e há $\approx e^{nH}$ delas.

Significado operacional

Rotular as sequências típicas custa nH nats: H nats ($H/\log 2$ bits) por símbolo, e nenhum código faz melhor (teorema da codificação de fonte).

Em resumo

O mesmo argumento, aplicado aos autovalores de ρ, dá a compressão quântica de Schumacher; aplicado aos coeficientes de Schmidt, dá a contagem de pares de Bell de S_A.

◂ Voltar ao slide 2 ▸ Conteúdo

Um spin-$\frac{1}{2}$: o bit quântico

Um spin-$\frac{1}{2}$ tem dois estados de base, "para cima" e "para baixo" ao longo de z:

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um estado geral é uma superposição $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Medir ao longo de z dá $\uparrow$ com probabilidade $|a|^2$.

As componentes do spin são as **matrizes de Pauli**:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Levantamento/abaixamento: $\sigma^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$, de modo que $\sigma^+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$, $\sigma^+|\uparrow\rangle = 0$.

Apontando ao longo de x

$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ satisfaz $\sigma^x|\rightarrow\rangle = +|\rightarrow\rangle$;
$|\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$ tem $\sigma^x = -1$.

Um spin ao longo de x é uma superposição de pesos iguais de para cima e para baixo em z: sua componente z é maximamente *incerta*.



◂ Voltar ao slide 4 ▸ Conteúdo

Medição: amplitudes dão probabilidades

Regra de Born

Se $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$, medir σ^z dá

$+1$ ($\uparrow$) com probabilidade $|a|^2$,

-1 ($\downarrow$) com probabilidade $|b|^2$,

e o estado salta para o observado.

Exemplo: spin ao longo de x

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\big): \qquad P(\uparrow) = P(\downarrow) = \frac{1}{2}.$$

Mas medir σ^x dá $+1$ com certeza.

Não é uma moeda

A moeda já é cara ou coroa antes de você olhar; você só não sabe. $|\rightarrow\rangle$ *não* é "cima ou baixo, não sabemos qual": é um estado definido (em x) que dá respostas aleatórias a uma pergunta sobre z.

Em resumo

A aleatoriedade quântica pode vir de uma pergunta sem resposta definida no estado. O emaranhamento é uma segunda fonte, mais profunda.

Dois spins: o produto tensorial

Dois spins têm quatro estados de base:

$$|\uparrow\uparrow\rangle, \quad |\uparrow\downarrow\rangle, \quad |\downarrow\uparrow\rangle, \quad |\downarrow\downarrow\rangle.$$

Um estado geral é uma superposição dos quatro,

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j\in\{\uparrow,\downarrow\}} C_{ij}\,|i\rangle_A|j\rangle_B, \qquad \sum_{ij}|C_{ij}|^2 = 1,$$

descrito, portanto, por uma tabela 2×2 de amplitudes:

$$C = \begin{pmatrix} C_{\uparrow\uparrow} & C_{\uparrow\downarrow} \\ C_{\downarrow\uparrow} & C_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}.$$

Contagem

Um spin: 2 números. Dois spins: $2\times 2 = 4$. N spins: 2^N. O número de amplitudes se *multiplica*, não se soma. Daí vêm tanto o poder quanto a dificuldade da física quântica de muitos corpos.

Notação

$|\uparrow\downarrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B$: spin A para cima e spin B para baixo. "$\otimes$" (produto tensorial) significa simplesmente "e".

Estados produto e estados emaranhados

Estado produto

Cada spin tem seu próprio estado:

$$|\psi\rangle = \big(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle\big)_A \otimes \big(c|\uparrow\rangle + d|\downarrow\rangle\big)_B,$$

i.e. a tabela fatora, $C_{ij} = \alpha_i \beta_j$:

$$C = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}, \qquad \det C = 0.$$

Estado emaranhado

Qualquer estado que *não* seja produto. Teste: se $\det C \neq 0$, não pode ser produto. Exemplo (o singleto):

$$|\psi^-\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det C = \frac{1}{2}.$$

Em resumo

Num estado produto, dá para descrever A sem mencionar B. Num estado emaranhado, não: não existe um "estado de A" como vetor.

Estados como matrizes densidade

Matriz densidade

Para um estado puro, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Para uma mistura estatística, $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Sempre: $\rho = \rho^\dagger$, $\rho \geq 0$, $\mathrm{Tr}\rho = 1$ e $\langle O\rangle = \mathrm{Tr}(\rho O)$.

- Diagonalize: $\rho|n\rangle = p_n|n\rangle$. Os autovalores $p_n \geq 0$ somam 1: são **probabilidades**.
- Estado puro $\Leftrightarrow$ um único $p_n = 1$, todos os outros 0.
- $\mathrm{Tr}\rho^2 = \sum_n p_n^2$ ("pureza") é 1 para um estado puro e menor para um misto.

Exemplo

$|{\rightarrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{\uparrow}\rangle + |{\downarrow}\rangle)$:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

As entradas fora da diagonal ("coerências") codificam a superposição. Uma mistura cara-ou-coroa de $\uparrow$ e $\downarrow$ seria $\frac{1}{2}\mathbb{1}$: mesma diagonal, nenhuma coerência.

Por que a autobase: a medição menos aleatória

Meça $\rho = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$ em outra base $\{|\varphi_m\rangle\}$

$$q_m = \langle\varphi_m|\rho|\varphi_m\rangle = \sum_i D_{mi}\lambda_i, \qquad D_{mi} = |\langle\varphi_m|i\rangle|^2.$$

Linhas e colunas de D somam um: D é *duplamente estocástica*.

Misturar aumenta a entropia

$\eta(x) = -x\log x$ é côncava; logo (Jensen) $\eta(q_m) \geq \sum_i D_{mi}\eta(\lambda_i)$. Somando em m:

$$H(q) \geq H(\lambda) = S(\rho).$$

Resultado principal

$$S(\rho) = \min_{\text{bases}} H\big(\{\langle\varphi_m|\rho|\varphi_m\rangle\}\big),$$

atingido na autobase.

Em resumo

Qualquer outra medição acrescenta aleatoriedade própria. $S(\rho)$ é o que sobra quando a medição é escolhida da forma mais esperta possível.

◂ Voltar ao slide 4 ▸ Conteúdo

A Parte 1 numa figura

- Dois objetos quânticos podem compartilhar um estado que não pode ser dividido num estado para cada um: eles estão emaranhados.
- Olhe só para um deles: ele se comporta como se tivesse sido preparado ao acaso, embora o par esteja num estado perfeitamente definido.
- A quantidade dessa "aleatoriedade aparente" é a entropia de emaranhamento.

Analogia: uma fotografia rasgada

Uma foto rasgada em duas. Cada metade sozinha parece um fragmento sem sentido; a informação está em como as duas metades se encaixam. Emaranhamento é informação guardada *só* nas correlações entre as partes.

A matriz densidade reduzida, calculada

Receita para $|\psi\rangle = \sum_{ij} C_{ij}|i\rangle|j\rangle$ puro

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B|\psi\rangle\langle\psi|, \qquad (\rho_A)_{ii'} = \sum_j C_{ij}\, C^*_{i'j},$$

i.e. $\rho_A = CC^\dagger$ (produto de matrizes).

Estado produto, $C = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}$

$$CC^\dagger = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} = |\varphi_A\rangle\langle\varphi_A| :$$

estado puro: A tem estado próprio definido.

Singleto

$$CC^\dagger = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{2} :$$

o estado mais aleatório de um spin.

Resultado principal

Todo puro e emaranhado $\Rightarrow$ parte mista.

Mais emaranhamento, ρ_A mais misto.

Entropia de emaranhamento: a definição

Entropia de emaranhamento de $|\psi\rangle$ puro, dividido em A e B

$$S_A = -\operatorname{Tr} \rho_A \log \rho_A, \qquad \rho_A = \operatorname{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|.$$

Propriedades

1. $S_A = 0 \iff |\psi\rangle$ é um estado produto.
2. $S_A \leq \log$(dimensão da parte menor).
3. $S_A = S_B$: os dois lados igualmente emaranhados.
4. Inalterada por operações só em A ou só em B.

O que significa

$S_A/\log 2$ é o número de pares de Bell "escondidos" em $|\psi\rangle$: com muitas cópias, destilam-se $S_A/\log 2$ singletos por cópia com operações locais e mensagens clássicas, e não mais.

Analogia

Emaranhamento é dinheiro; o singleto, a moeda; S_A, a taxa de câmbio.

A decomposição de Schmidt: a impressão digital de um estado puro

Teorema de Schmidt

Todo estado puro de $A \cup B$ pode ser escrito como

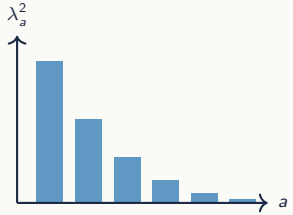
$$|\psi\rangle = \sum_{a=1}^{r} \lambda_a \, |u_a\rangle_A |v_a\rangle_B,$$

com $\lambda_a > 0$, $\sum_a \lambda_a^2 = 1$, $|u_a\rangle$ ortonormais e $|v_a\rangle$ ortonormais.

Como

SVD da tabela de amplitudes, $C = U\Lambda V^\dagger$. Então $\rho_A = \sum_a \lambda_a^2 |u_a\rangle\langle u_a|$; logo

$$S_A = -\sum_a \lambda_a^2 \log \lambda_a^2.$$



espectro de Schmidt

Em resumo

Os λ_a^2 bastam. Um só λ não nulo: produto. Muitos λ iguais: muito emaranhado. λ decaindo rápido: pouco emaranhado e *barato no computador* (Apêndice E).

◂ Voltar ao slide 6 ▸ Conteúdo

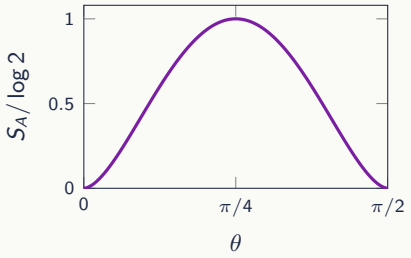
Exemplos resolvidos

Um estado ajustável

$$|\psi_\theta\rangle = \cos\theta\,|\uparrow\downarrow\rangle + \sin\theta\,|\downarrow\uparrow\rangle :$$

já na forma de Schmidt, com $\lambda_1^2 = \cos^2\theta$, $\lambda_2^2 = \sin^2\theta$; logo

$$S_A = -\cos^2\theta \log\cos^2\theta - \sin^2\theta \log\sin^2\theta.$$

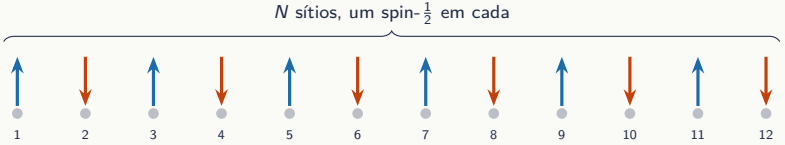


- Estado GHZ $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle)$: $S_A = \log 2$ para qualquer corte.
- Um spin invertido espalhado por N sítios (estado W): $S_A = h(\ell/N) \leq \log 2$.
- Produto de singletos nas ligações $(1,2), (3,4), \ldots$: $S_A = \log 2 \times$(número de singletos cortados).

Em resumo

$\theta = 0, \frac{\pi}{2}$: produto, $S = 0$. $\theta = \frac{\pi}{4}$: par de Bell, $S = \log 2$, um bit inteiro.

Muitos spins: uma cadeia, e por que é difícil



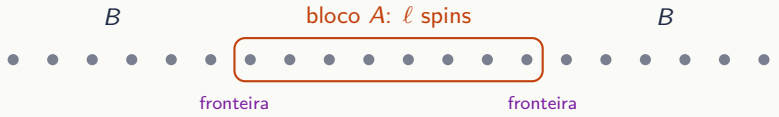
- Os estados da cadeia inteira vivem no espaço **produto tensorial**: base $|s_1 s_2 \cdots s_N\rangle$, $s_j \in \{\uparrow, \downarrow\}$.
- Dimensão $= 2^N$. Um estado geral precisa de 2^N números complexos.
- σ_j^a age só no spin j: $\sigma_j^a = \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \sigma^a \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}$.

A parede exponencial

$N = 20$: 10^6 números (fácil).
$N = 50$: 10^{15} (impossível de guardar).
$N = \infty$: o que realmente queremos.

O Apêndice E explica como os *estados de produto de matrizes* vencem essa parede para os estados de que precisamos.

Emaranhamento de um bloco numa cadeia



A pergunta da Parte 1

A cadeia está no estado fundamental. Como a entropia de emaranhamento $S_A(\ell)$ de um bloco de ℓ spins consecutivos cresce com ℓ?

Em resumo

A resposta diz se a cadeia é com gap ou sem gap (Parte 3), quão cara é sua simulação (Apêndice E) e — num ponto crítico — um número universal chamado carga central c.

Apêndice B — Assimetria de emaranhamento em detalhe

Por que ela é não negativa (caso de von Neumann)

$n \to 1$: a assimetria é uma entropia relativa

1. $\rho_{A,Q}$ é bloco-diagonal; logo $\log \rho_{A,Q}$ também é: $\Pi_q \log \rho_{A,Q} \Pi_{q'} = 0$ para $q \neq q'$.
2. Portanto só entram os blocos diagonais de ρ_A:
   $\mathrm{Tr}[\rho_A \log \rho_{A,Q}] = \sum_q \mathrm{Tr}[\Pi_q \rho_A \Pi_q \log \rho_{A,Q}] = \mathrm{Tr}[\rho_{A,Q} \log \rho_{A,Q}] = -S(\rho_{A,Q})$.
3. Assim,
   $$\mathrm{Tr}\left[\rho_A(\log \rho_A - \log \rho_{A,Q})\right] = -S(\rho_A) + S(\rho_{A,Q}) = \Delta S_A.$$
4. O lado esquerdo é a **entropia relativa** quântica $S(\rho_A \| \rho_{A,Q})$, que é ≥ 0, com igualdade sse $\rho_A = \rho_{A,Q}$ (desigualdade de Klein).

n geral

Os autovalores de $\rho_{A,Q}$ são "médias" dos de ρ_A (tecnicamente: majorizados por eles), e toda entropia de Rényi cresce sob essas médias. Igualdade só se nada foi promediado.

Para que serve a assimetria

Teoria de recursos da assimetria

Estados que quebram uma simetria são um *recurso*: servem de referencial (direção comum, fase de relógio). Operações simétricas não o criam. ΔS_A é a medida padrão de quanto dele um estado tem (Vaccaro et al. 2008; Gour, Marvian, Spekkens 2009).

- Nunca aumenta sob operações simétricas.
- Zero sse o estado é simétrico.
- Medida com as medições aleatorizadas que dão as entropias de Rényi (íons, 2024).

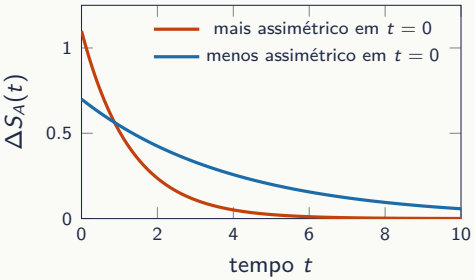
Dois laboratórios, sem norte comum

Alice quer dizer a Bob para onde é "x", mas não há direção de referência comum. Enviar spins apontando em x ajuda; sua utilidade depende de quão assimétricos são.

Discreta versus contínua

Para um grupo finito com $|G|$ elementos, $\Delta S \leq \log |G|$: p. ex. no máximo $\log 2$ para $\mathbb{Z}_2$ (inversão de spin). Só simetrias contínuas, como rotações, permitem crescer sem limite, como $\frac{1}{2} \log \ell$.

Assimetria no tempo



- Prepare um estado que quebra a simetria e deixe-o evoluir com um hamiltoniano *simétrico*. A janela esquece aos poucos sua orientação: $\Delta S_A(t) \to 0$.
- Surpresa: o estado inicial *mais* assimétrico pode ficar simétrico *mais rápido* — uma versão quântica da água quente que congela antes da fria (Ares, Murciano, Calabrese 2023).
- Observado com íons aprisionados (Joshi et al. 2024).

Em resumo

O artigo calcula a assimetria de *equilíbrio* de uma cadeia interagente com gap: a linha de base para essa dinâmica.

◂ Voltar ao slide 13 ▸ Conteúdo

Apêndice C — A cadeia XYZ em detalhe

Energia, hamiltoniano, estado fundamental

Hamiltoniano

Uma matriz hermitiana H cujos autovalores $E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \ldots$ são as energias permitidas: $H|n\rangle = E_n|n\rangle$. O autovetor $|0\rangle$ de menor energia é o **estado fundamental**.

- A temperatura zero, um sistema relaxa para o estado fundamental. Todas as afirmações de "equilíbrio" desta palestra se referem a $|0\rangle$.
- Números mensuráveis são **valores esperados**: $\langle O\rangle = \langle 0|O|0\rangle$.
- Evolução temporal: $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle$; um operador evolui como $\dot{O} = i[H, O]$.

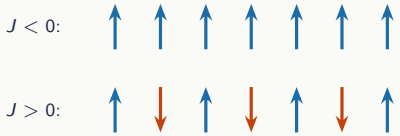
Em resumo

H é a "contabilidade de energia" do ímã: cada termo diz quais arranjos de spins vizinhos custam energia e quais a economizam. O estado fundamental é o melhor compromisso entre todos os termos ao mesmo tempo.

Troca: vizinhos querem se alinhar ou se anti-alinhar

A interação mais simples entre dois spins vizinhos é

$$H_{\text{par}} = J\,\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z, \qquad \sigma_j^z\sigma_{j+1}^z = \begin{cases} +1 & \uparrow\uparrow \text{ ou } \downarrow\downarrow \\ -1 & \uparrow\downarrow \text{ ou } \downarrow\uparrow \end{cases}$$



- $J < 0$: pares alinhados têm energia menor: ferromagneto $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$.
- $J > 0$: pares anti-alinhados têm energia menor: antiferromagneto $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$.

Em resumo

O acoplamento vem do princípio de Pauli e do salto de elétrons entre íons ("troca"), não da minúscula força de dipolo magnético.

Acoplamentos em três eixos

Spins têm três componentes; em geral

$$H = \sum_j \left(J_x\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x + J_y\sigma_j^y\sigma_{j+1}^y + J_z\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z\right),$$

um acoplamento por eixo. "XYZ": os três são diferentes.

O que cada termo faz com os spins

$\sigma^z\sigma^z$: uma energia, sem movimento

Diagonal na base $\uparrow/\downarrow$: não muda a configuração, apenas atribui $\pm J_z$ a cada ligação.

$\sigma^x\sigma^x + \sigma^y\sigma^y$: flip-flop

Com $\sigma^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$,

$$\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y\sigma_{j+1}^y = 2\left(\sigma_j^+\sigma_{j+1}^- + \sigma_j^-\sigma_{j+1}^+\right) :$$

$\uparrow\downarrow \leftrightarrow \downarrow\uparrow$. Um spin para cima *salta* para o sítio vizinho; o número de spins para cima não muda.

$\sigma^x\sigma^x - \sigma^y\sigma^y$: criação de pares

$$\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x - \sigma_j^y\sigma_{j+1}^y = 2\left(\sigma_j^+\sigma_{j+1}^+ + \sigma_j^-\sigma_{j+1}^-\right) :$$

$\downarrow\downarrow \leftrightarrow \uparrow\uparrow$. Dois spins para cima aparecem ou somem juntos: o número de spins para cima muda de ± 2.

Resultado principal

O hopping conserva $Q = \frac{1}{2}\sum \sigma^z$; a criação de pares, não. Se $J_x = J_y$ ou não decide se existe a simetria de rotação em torno de z — a simetria cuja quebra medimos.

Simetria, e a carga Q

Simetria

Uma unitária U com $[H, U] = 0$. Se $U(\alpha) = e^{i\alpha Q}$ para todo α real, Q é seu **gerador** ("carga"), e $[H, Q] = 0$ significa que Q é conservada: $\dot{Q} = i[H, Q] = 0$.

Rotações de ângulo α em torno de z são geradas pela magnetização total em z

$$Q = \frac{1}{2}\sum_j \sigma_j^z \qquad \text{(autovalores: semi-inteiros ou inteiros).}$$

Elas agem como $e^{i\alpha Q}\sigma_j^{\pm}e^{-i\alpha Q} = e^{\pm i\alpha}\sigma_j^{\pm}$.

A XXZ é simétrica

$\sigma^x\sigma^x + \sigma^y\sigma^y = 2(\sigma_j^+\sigma_{j+1}^- + \sigma_j^-\sigma_{j+1}^+)$ ganha um fator $e^{i\alpha}e^{-i\alpha} = 1$; $\sigma^z\sigma^z$ fica intacto.
Logo $[H_{\mathrm{XXZ}}, Q] = 0$: uma simetria contínua $U(1)$.

Em resumo

$U(1)$ = "girar todos os spins pelo mesmo ângulo em torno de z". Na XXZ nada muda na energia; Q (número de spins para cima menos $N/2$) não pode ser criada nem destruída.

Quebra explícita: o que γ faz

Reescrevendo a anisotropia

$$\gamma(\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x - \sigma_j^y\sigma_{j+1}^y) = 2\gamma\,(\sigma_j^+\sigma_{j+1}^+ + \sigma_j^-\sigma_{j+1}^-).$$

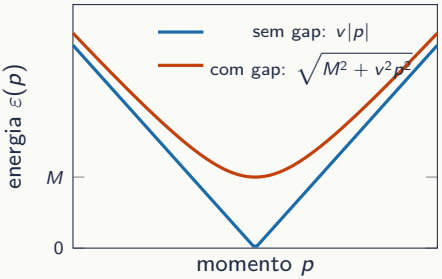
Verificação: $\sigma^x\sigma^x - \sigma^y\sigma^y$ com $\sigma^x = \sigma^+ + \sigma^-$, $\sigma^y = -i(\sigma^+ - \sigma^-)$ dá $(\sigma^+ + \sigma^-)(\sigma^+ + \sigma^-) + (\sigma^+ - \sigma^-)(\sigma^+ - \sigma^-) = 2(\sigma^+\sigma^+ + \sigma^-\sigma^-)$ (operadores em sítios diferentes).

- $\sigma_j^+\sigma_{j+1}^+$ vira dois spins para baixo para cima: muda Q de $+2$.
  Formalmente $[Q, \sigma_j^+\sigma_{j+1}^+] = 2\,\sigma_j^+\sigma_{j+1}^+$.
- Logo $[H, Q] \neq 0$: Q **não é conservada**. Isso é quebra **explícita** de simetria: escrita no próprio H.

O que sobrevive

Sob $e^{i\alpha Q}$ o termo ganha $e^{\pm 2i\alpha}$; assim, só $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$ continuam simetrias. $U(1)$ se reduz a $\mathbb{Z}_2 = \{1, e^{i\pi Q}\}$, a rotação de π em torno de z.

Quasipartículas com e sem massa



- Sem gap: existem excitações de energia arbitrariamente baixa (como fótons, ondas sonoras). $\varepsilon = v|p|$.
- Com gap: toda excitação custa pelo menos M (como uma partícula massiva na relatividade, com a "velocidade da luz" substituída pela velocidade das ondas de spin v). $\varepsilon = \sqrt{M^2 + v^2p^2}$.

Resultado principal

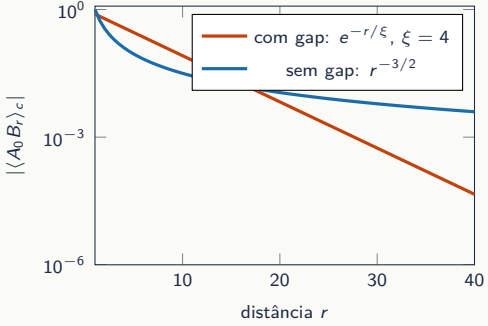
Numa cadeia com gap, o gap *é* a massa da quasipartícula mais leve. Na cadeia XYZ essa partícula é o kink (adiante), e sua massa M pode ser calculada.

Correlações: exponencial versus lei de potência

Correlação conexa

$\langle A_0 B_r \rangle_c \equiv \langle A_0 B_r \rangle - \langle A_0 \rangle \langle B_r \rangle$.
É zero quando o que acontece em 0 não diz nada sobre o que acontece em r.

- Com gap: $\langle \cdot \rangle_c \sim e^{-r/\xi}$ — "cluster". Regiões distantes são quase independentes.
- É essa independência que torna finitas as *somas* de correlações, p. ex. a susceptibilidade $\chi_{zz} = \frac{1}{2} \sum_r \langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_c$, que controla nossa resposta.

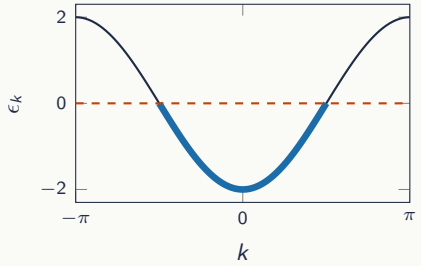


Um exemplo sem gap: a cadeia XX é um mar de Fermi

$$H_{XX} = -\frac{1}{2}\sum_j \left(\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y\right)$$

$$= -\sum_j \left(c_j^\dagger c_{j+1} + \text{h.c.}\right)$$

- Spins para cima saltam e não podem ocupar o mesmo sítio: comportam-se como *férmions* (Jordan–Wigner).
- Férmions livres com energias $\epsilon_k = -2\cos k$. O estado fundamental preenche todos os $\epsilon_k < 0$: o mar de Fermi.
- Levar um férmion de logo abaixo para logo acima do nível de Fermi custa energia arbitrariamente pequena: **sem gap**.



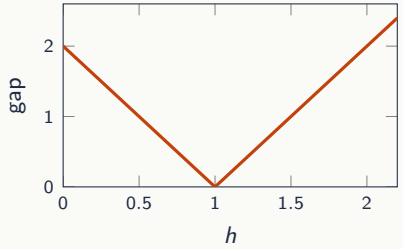
Em resumo

Estados preenchidos (azul) até o nível de Fermi (tracejado). As correlações decaem como $1/r^2$; a entropia do bloco é $S_A = \frac{1}{3}\log \ell + \ldots$ $(c = 1)$.

Um exemplo com gap, e uma transição de fase: a cadeia de Ising

$$H = -\sum_j \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x - h \sum_j \sigma_j^z$$

- $h = 0$: dois estados fundamentais ordenados, $\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ e $\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow$. A excitação mais barata é uma parede de domínio: gap = custo de uma ligação quebrada. **Com gap, ordenada.**
- $h \gg 1$: todos os spins ao longo de z; inverter um custa $\sim 2h$. **Com gap, desordenada.**
- $h = 1$: o gap fecha, $\Delta \propto |h - 1|$. **Sem gap**: um ponto crítico quântico ($c = \frac{1}{2}$).



Resultado principal

Um ponto sem gap é em geral a *fronteira* entre duas fases com gap: o gap fecha onde a natureza do estado fundamental muda.

Existe uma cadeia XYZ sem gap?

Só onde a U(1) é restaurada

O gap só fecha quando dois acoplamentos coincidem (em módulo), i.e. quando a cadeia é, disfarçada, uma XXZ num referencial girado, *e* essa XXZ é crítica, $-1 < \Delta_{\mathrm{ef}} \leq 1$:

- $\gamma = 0$, $|\Delta_z| < 1$: XXZ em torno de z — **sem gap**.
- $\Delta_z = \pm(1+\gamma)$: XXZ em torno de y — **sem gap**.
- Três acoplamentos diferentes: **sempre com gap** (Baxter).

Na nossa janela

Para $\gamma > 0$ e $|\Delta_z| < 1$ a cadeia tem gap em toda parte. A linha $\gamma = 0$ é a transição entre a ordem de Néel em x ($\gamma > 0$) e em y ($\gamma < 0$).

Atenção

Na linha sem gap o estado fundamental é simétrico, $[\rho_A, Q_A] = 0$; logo a assimetria é *zero*. Quando $\gamma \to 0$ com ℓ fixo, $\Delta S_A \to 0$.

Duas maneiras de quebrar uma simetria

Quebra explícita

As *regras* (o hamiltoniano) não são simétricas: $[H, U] \neq 0$.

Analogia

Uma bola numa mesa *inclinada* rola para baixo: a própria mesa tem direção preferida.



Resultado principal

Na XYZ: $\gamma \neq 0$ quebra explicitamente a U(1) (rotação em torno de z).

Quebra espontânea

As regras são simétricas, mas o *estado fundamental* não: ele escolhe uma de várias opções equivalentes.

Analogia

Um lápis equilibrado na ponta cai em *alguma* direção, embora todas sejam equivalentes.



Resultado principal

Na XYZ: o estado escolhe um de dois padrões Néel-x: quebra espontânea de $\mathbb{Z}_2$.

Por que ao longo de x, e o que “vácuo” significa

- O acoplamento em x, $1+\gamma$, é o maior acoplamento positivo; então a energia é mínima quando vizinhos se anti-alinham em x. Com $\gamma < 0$ seria y.
- A simetria deixada por γ é a rotação de π em torno de z: $\sigma^x \to -\sigma^x$, $\sigma^y \to -\sigma^y$. Ela leva um padrão Néel-x no outro.
- Numa cadeia finita, o verdadeiro estado fundamental é a superposição simétrica (um “gato”), separada da antissimétrica por uma energia $\sim e^{-N/\xi}$. Numa cadeia infinita elas ficam degeneradas e o estado físico é um dos dois.

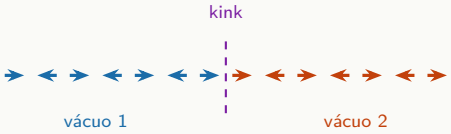
Vácuo

Termo de teoria de campos para “um estado fundamental”. A cadeia XYZ tem dois vácuos, $|0_1\rangle$ e $|0_2\rangle$, com a mesma energia. Excitações são perturbações sobre um vácuo.

Para a assimetria

O cálculo é feito em *um* vácuo (o físico). O estado gato daria a mesma resposta deslocada de $-\log 2$.

Kinks em mais detalhe



- Dois spins vizinhos apontam no *mesmo* sentido: uma ligação "frustrada", um custo de energia.
- A parede se move (o hopping a desloca); logo, carrega momento: uma partícula.
- Flutuações quânticas espalham a parede por $\sim \xi$ sítios; sua energia de repouso é a massa M.

Topológico

Um kink não sai com uma mudança local: bem à esquerda vê-se o vácuo 1, bem à direita o vácuo 2, aconteça o que for perto da parede. Só outra parede (um *antikink*) o desfaz.

Kinks vêm em pares

A partir de um vácuo, operações locais criam paredes em pares: inverter um spin de $\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow$ cria duas. As excitações mais leves são pares kink–antikink, de energia $\geq 2M$.

Breathers, explicados

Estados ligados

Elétron e próton se atraem e formam o hidrogênio, mais leve que os dois separados (energia de ligação). Kink e antikink que se atraem formam um breather, mais leve que $2M$.

Massas (sine-Gordon)

$$m_{B_n} = 2M \sin \frac{n\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2}, \qquad n = 1, 2, \cdots < \frac{1}{\xi_{\mathrm{sG}}},$$

com $\xi_{\mathrm{sG}} < 1$ no lado atrativo $\Delta_z < 0$.

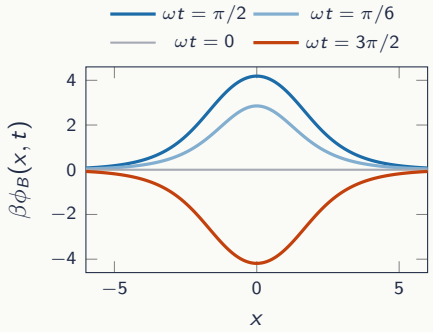
Por que "breather"

Na teoria clássica, o estado ligado é um kink e um antikink em órbita; o perfil do campo incha e encolhe, como um pulmão ("breather" = "o que respira"; próximo slide).

Para o artigo

Para $\Delta_z < 0$ a carga quebrada pode criar sozinho o breather mais leve, B_1, que contribui para as flutuações de carga junto com os pares de kinks. Para $\Delta_z > 0$ só os pares contribuem.

O breather clássico: um kink e um antikink em órbita



Solução breather (unidades $m = 1$)

$$\beta\phi_B = 4\arctan\left[\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega}\,\frac{\sin\omega t}{\cosh(\sqrt{1-\omega^2}\,x)}\right]$$

Em resumo

A lombada cresce, encolhe, troca de sinal e volta: "respira". Longe, o campo está no *mesmo* vácuo dos dois lados: sem parede líquida, um operador local pode criá-lo. Na teoria quântica a frequência é quantizada: as massas m_{B_n}.

Afastando o zoom: da rede a um campo

- Quando $\xi \gg 1$ sítio, a física interessante acontece em muitos sítios. Vista de longe, a cadeia parece um meio *contínuo*.
- Troque os spins por um campo suave $\phi(x)$ que varia lentamente de sítio a sítio: uma teoria de campos.
- Suas previsões são universais: redes diferentes com as mesmas simetrias e o mesmo comportamento a longas distâncias dão as mesmas respostas quando os comprimentos são medidos em unidades de ξ.

Água

A água é feita de moléculas, mas as ondas num lago são descritas por equações suaves de fluidos. Os detalhes moleculares entram só por alguns números (densidade, viscosidade).

Em resumo

Aqui os "poucos números" são a massa do kink M e o acoplamento β^2 (equivalentemente, Δ_z). A assimetria dependerá da rede só por meio deles.

Bosonização

- Em $\gamma = 0$ a cadeia XXZ é sem gap. Suas excitações de baixa energia são ondas de densidade/fase de comprimento de onda longo: um **campo bosônico** livre $\phi(x, t)$ (um "líquido de Luttinger").
- Operadores de spin locais viram exponenciais ("operadores de vértice") $e^{ia\phi}$ do campo.
- A interação Δ_z muda a rapidez do decaimento das correlações, por meio de um único número:

$$\beta^2 = 1 - \frac{\theta_0}{\pi}, \qquad \theta_0 = \arccos \Delta_z,$$

ou, equivalentemente, o parâmetro de Luttinger $K = 1/(2\beta^2)$.

Δ_z	θ_0	β^2	K
$\to -1$	π	0	∞
-0.5	$2\pi/3$	$1/3$	$3/2$
0	$\pi/2$	$1/2$	1
0.3	1.266	0.597	0.838
0.5	$\pi/3$	$2/3$	$3/4$
$\to 1$	0	1	$1/2$

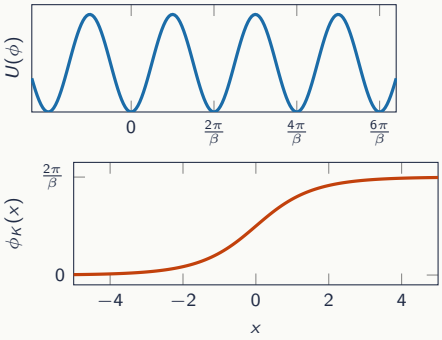
Em resumo

Em $\Delta_z = 0$, $\beta^2 = \frac{1}{2}$: o ponto de férmions livres. Nesta convenção, $e^{ia\phi}$ tem dimensão de escala $2a^2$.

◂ Voltar ao slide 29 ▸ Conteúdo

Sine-Gordon clássico: vácuos e a solução de kink

- Potencial $U(\phi) = 2\mu(1 - \cos\beta\phi)$: infinitos mínimos $\phi_k = 2\pi k/\beta$.
- **Kink**: uma solução estática que vai de $\phi = 0$ a $2\pi/\beta$.



Encontrando-o (truque de Bogomolny)

A energia estática $E = \int[\frac{1}{16\pi}\phi'^2 + U]\mathrm{d}x$ é mínima, com extremos fixos, quando $\frac{1}{16\pi}\phi'^2 = U(\phi)$, i.e. $\phi' = 8\sqrt{\pi\mu}\,|\sin\frac{\beta\phi}{2}|$. Integrando,

$$\phi_K(x) = \frac{4}{\beta}\arctan e^{mx}, \qquad m = 4\beta\sqrt{\pi\mu}.$$

O campo está num vácuo à esquerda e no vizinho à direita: uma parede de domínio de largura $\sim 1/m$. O "antikink" vai no sentido oposto.

Apêndice D — Derivações por trás da Parte 4

Ferramenta 1: um projetor como integral de Fourier

Representação de Fourier

$$\Pi_q = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi}\, e^{i\alpha(Q_A - q)}.$$

Demonstração

Aplique os dois lados a um autoestado $|q'\rangle$ de Q_A (q' inteiro):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} e^{i\alpha(q'-q)}|q'\rangle = \begin{cases} |q'\rangle & q' = q \\ \dfrac{e^{i\pi(q'-q)} - e^{-i\pi(q'-q)}}{2\pi i(q'-q)}|q'\rangle = 0 & q' \neq q \end{cases}$$

pois $\sin(\pi m) = 0$ para todo inteiro m não nulo. É isso que Π_q faz.

Atenção

Usa cargas inteiras: por isso tomamos ℓ par. $e^{i\alpha Q_A}$ é uma rotação da janela pelo ângulo α: o projetor é uma *média sobre todas as rotações*.

Ferramenta 2: o momento carregado ($n = 2$)

Dos projetores a um único ângulo

1. $\mathrm{Tr}\rho_{A,Q}^2 = \sum_{q,q'} \mathrm{Tr}[\Pi_q \rho_A \Pi_q \Pi_{q'} \rho_A \Pi_{q'}] = \sum_q \mathrm{Tr}[\Pi_q \rho_A \Pi_q \rho_A]$ (use $\Pi_q \Pi_{q'} = \delta_{qq'} \Pi_q$ e ciclicidade).
2. Insira a forma de Fourier para os dois Π_q (ângulos α, α'):

$$\sum_q \int \frac{\mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\alpha'}{(2\pi)^2} e^{-i(\alpha+\alpha')q} \mathrm{Tr}[e^{i\alpha Q_A} \rho_A e^{i\alpha' Q_A} \rho_A].$$

3. $\sum_q e^{-i(\alpha+\alpha')q} = 2\pi\, \delta(\alpha + \alpha')$ no círculo; logo $\alpha' = -\alpha$.

Resultado principal

$$\frac{\mathrm{Tr}\rho_{A,Q}^2}{\mathrm{Tr}\rho_A^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} Z_2(\alpha), \qquad Z_2(\alpha) = \frac{\mathrm{Tr}[\rho_A e^{i\alpha Q_A} \rho_A e^{-i\alpha Q_A}]}{\mathrm{Tr}\rho_A^2}.$$

Z_2 é a sobreposição entre ρ_A e sua cópia girada. $Z_2(0) = 1$ e $|Z_2| \leq 1$.

Expandindo Z_2 para ângulos pequenos (1/2)

Escreva $\rho \equiv \rho_A$, $Q \equiv Q_A$. Expanda $e^{\pm i\alpha Q} = 1 \pm i\alpha Q - \frac{1}{2}\alpha^2 Q^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\rho e^{i\alpha Q}\rho e^{-i\alpha Q}] &= \mathrm{Tr}\rho^2 + i\alpha\Big(\underbrace{\mathrm{Tr}[\rho Q\rho] - \mathrm{Tr}[\rho\rho Q]}_{=0 \text{ (ciclicidade)}}\Big) \\ &\quad + \alpha^2\Big(\mathrm{Tr}[\rho Q\rho Q] - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\rho Q^2\rho] - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\rho\rho Q^2]\Big) + \mathcal{O}(\alpha^3) \\ &= \mathrm{Tr}\rho^2 - \alpha^2\Big(\mathrm{Tr}[\rho^2 Q^2] - \mathrm{Tr}[\rho Q\rho Q]\Big) + \mathcal{O}(\alpha^3).\end{aligned}$$

(As ordens ímpares se anulam: Z_2 é real, e $Z_2(-\alpha) = Z_2(\alpha)$ pela ciclicidade do traço.)

Em resumo

O termo constante é a pureza; o termo linear se cancela; a primeira informação não trivial é quadrática no ângulo.

Ângulos pequenos: a largura V

Use a autobase $\rho|n\rangle = p_n|n\rangle$ e $Q_{nm} = \langle n|Q|m\rangle$:

$$\mathrm{Tr}[\rho^2 Q^2] = \sum_n p_n^2 (Q^2)_{nn} = \sum_{n,m} p_n^2 |Q_{nm}|^2, \qquad \mathrm{Tr}[\rho Q \rho Q] = \sum_{n,m} p_n p_m |Q_{nm}|^2.$$

A diferença é $\sum_{nm} |Q_{nm}|^2 (p_n^2 - p_n p_m)$. Simetrize em $n \leftrightarrow m$ (as duas ordens aparecem, $|Q_{nm}| = |Q_{mn}|$):

$$\frac{1}{2} \sum_{n,m} |Q_{nm}|^2 \left(p_n^2 + p_m^2 - 2 p_n p_m\right) = \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} |Q_{nm}|^2 (p_n - p_m)^2.$$

Resultado principal

$$Z_2(\alpha) = 1 - V\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^4), \qquad V = \frac{1}{2\mathrm{Tr}\rho_A^2} \sum_{n \neq m} |\langle n|Q_A|m\rangle|^2 (p_n - p_m)^2.$$

$V \geq 0$; $V = 0$ sse $[Q_A, \rho_A] = 0$. V mede a coerência entre setores.

A largura V não é (bem) a variância

Variância da carga da janela

$\mathrm{Var}(Q_A) = \mathrm{Tr}[\rho_A Q_A^2] - (\mathrm{Tr}[\rho_A Q_A])^2$: uma função de correlação do estado fundamental,

$$\mathrm{Var}(Q_A) = \frac{1}{4} \sum_{i,j \in A} \langle \sigma_i^z \sigma_j^z \rangle_c .$$

Compare, na autobase de ρ_A

$$\mathrm{Var}(Q_A) = \sum_{n \neq m} p_n |Q_{nm}|^2 + \left[\sum_n p_n Q_{nn}^2 - \left(\sum_n p_n Q_{nn} \right)^2 \right], \qquad V = \frac{\sum_{n \neq m} |Q_{nm}|^2 (p_n - p_m)^2}{2 \sum_n p_n^2}.$$

Mesmos elementos de matriz, *pesos diferentes*.

Afirmação (demonstrada para duas classes de estados)

$V = \mathrm{Var}(Q_A) \left[1 + \mathcal{O}(\ell^{-1}) \right]$ — uma quantidade de emaranhamento vira uma função de correlação comum.

Ideia da demonstração 1: férmions livres (gaussianos)

Para uma ρ_A gaussiana com modos de emaranhamento d_k, ocupações $f_k \in [0,1]$ e uma carga de um corpo $Q = \sum A_{kl} d_k^\dagger d_l + \frac{1}{2}\sum (B_{kl} d_k^\dagger d_l^\dagger + \text{h.c.})$, o teorema de Wick dá (com $D_k = f_k^2 + (1-f_k)^2$):

$$V = \frac{1}{2}\sum_{kl} |A_{kl}|^2 \frac{(f_k - f_l)^2}{D_k D_l} + \sum_{k<l} |B_{kl}|^2 \frac{[f_k f_l - (1-f_k)(1-f_l)]^2}{D_k D_l},$$

$$\mathrm{Var}(Q) = \frac{1}{2}\sum_{kl} |A_{kl}|^2 [f_k(1-f_l) + f_l(1-f_k)] + \sum_{k<l} |B_{kl}|^2 [f_k f_l + (1-f_k)(1-f_l)].$$

Modos nítidos dão pesos iguais

$f_k = 1, f_l = 0$: pesos A iguais a 1 e 1.
$f_k = f_l = 1$: pesos B 1 e 1; pesos A 0, 0.
$f_k = f_l = 0$: pesos B 1 e 1.

Em resumo

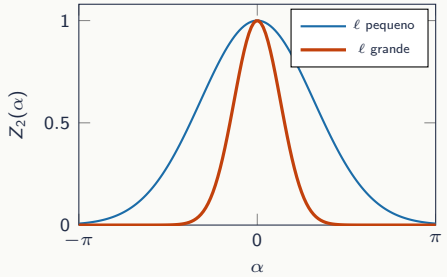
Os pesos só diferem para modos "suaves", com f_k longe de $0, 1$. Numa cadeia com gap, o espectro de emaranhamento tem espaçamento $\mathcal{O}(1)$; só $\mathcal{O}(1)$ modos são suaves: a diferença é $\mathcal{O}(1)$ contra um total $\mathcal{O}(\ell)$.

A avaliação gaussiana (ponto de sela)

- Numa janela longa, $\log Z_2$ é **extensivo**: $\log Z_2(\alpha) \simeq -V\alpha^2$ com $V \propto \ell$.
- Logo, Z_2 é uma gaussiana estreita de largura $\alpha \sim V^{-1/2} \sim \ell^{-1/2}$.
- Correções quárticas: $\alpha^4 \ell \sim \ell^{-1}$, desprezíveis. Estenda os limites a $\pm\infty$:

$$\int \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} e^{-V\alpha^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{V}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi V}},$$

$$\Delta S_A^{(2)} = -\log \frac{\mathrm{Tr}\rho_{A,Q}^2}{\mathrm{Tr}\rho_A^2} = \frac{1}{2}\log(4\pi V).$$

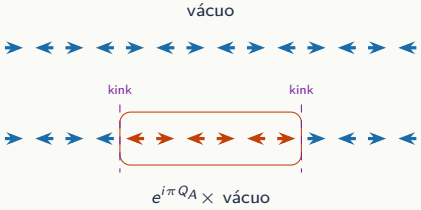


Em resumo

Quanto mais longa a janela, mais rápido uma cópia girada se torna distinguível da original.

O que acontece perto de $\alpha = \pm\pi$? (kinks de novo)

- $e^{i\pi Q_A} = \prod_{j\in A} e^{i\pi\sigma_j^z/2} = \prod_{j\in A}(i\sigma_j^z)$: uma corda de σ^z sobre a janela.
- Ela gira cada spin de A por π em torno de z: o Néel-x é invertido *só dentro* de A.
- O estado girado tem dois kinks, nas pontas de A, e o vácuo errado entre eles.
- Sua sobreposição com o original decai como $e^{-\ell/\xi}$: Z_2 perto de $\pm\pi$ é **exponencialmente pequeno** em ℓ e não contribui para os termos em lei de potência.



Índice de Rényi geral: n réplicas

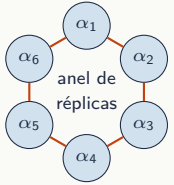
Simetrização = média sobre rotações

Inserir a forma de Fourier de Π_q em $\sum_q \Pi_q \rho_A \Pi_q$ dá $\rho_{A,Q} = \int \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha Q_A} \rho_A e^{i\alpha Q_A}$. Tome a n-ésima potência com um ângulo α_j por fator; rotações vizinhas se fundem, $e^{i\alpha_j Q_A} e^{-i\alpha_{j+1} Q_A} = e^{iu_j Q_A}$:

$$\frac{\mathrm{Tr}\rho_{A,Q}^n}{\mathrm{Tr}\rho_A^n} = \int \prod_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\alpha_j}{2\pi} \, Z_n(\vec{u}), \qquad u_j = \alpha_j - \alpha_{j+1}, \quad \alpha_{n+1} \equiv \alpha_1,$$

$$Z_n(\vec{u}) = \frac{\mathrm{Tr}[\rho_A e^{iu_1 Q_A} \rho_A e^{iu_2 Q_A} \cdots \rho_A e^{iu_n Q_A}]}{\mathrm{Tr}\rho_A^n}, \qquad \sum_j u_j = 0.$$

- Expandir até segunda ordem acopla as réplicas r, r' via larguras V_d, $d = |r - r'|$ ao longo do anel, com $V_d = V_{n-d}$.
- Se todos $V_d = V$: $\log Z_n \simeq -\frac{V}{2} \sum_j (\alpha_j - \alpha_{j+1})^2$.



$n = 6$ cópias de $\rho_{A,Q}$, cada uma com seu ângulo de rotação α_j, coladas num anel pelo traço. Em cada elo só entra $u_j = \alpha_{j+1} - \alpha_j$, com peso $e^{-Vu_j^2/2}$: molas entre vizinhos.

As larguras das réplicas, explicitamente

Expansão de segunda ordem na autobase de ρ_A

$$\log Z_n = -\frac{1}{2}\sum_{r\neq r'} u_r u_{r'} \Phi_{|r-r'|} - \frac{1}{2}\Big(\sum_r u_r^2\Big)\Phi_0, \qquad \Phi_d = \frac{\sum_{a\neq b} |Q_{ab}|^2 p_a^d p_b^{n-d}}{\mathrm{Tr}\rho^n}.$$

Usando $\sum_r u_r = 0$, a forma pode ser reescrita com

$$V_d = \frac{1}{2\mathrm{Tr}\rho^n}\sum_{a\neq b} |Q_{ab}|^2 (p_a^d - p_b^d)(p_a^{n-d} - p_b^{n-d}), \qquad d = 1, \ldots, n-1.$$

- $n = 2$: uma largura, $V_1 = V$ (A42).
- $V_d = V_{n-d}$ (troque $d \leftrightarrow n-d$). Para $n = 3$: $V_1 = V_2$ automaticamente.

Uniformidade (demonstrada em A50)

Para todo n e d: $V_d = \mathrm{Var}(Q_A)\,[1 + \mathcal{O}(1/\ell)]$. O acoplamento entre réplicas vive só nas duas pontas da janela.

A integral gaussiana sobre n ângulos

1. Gire para a autobase ortonormal de $\mathbb{L}_n$ (jacobiano 1).
2. Cada um dos $n-1$ modos não nulos: $\int \mathrm{d}y\, e^{-\frac{V}{2}\lambda_k y^2} = \sqrt{2\pi/(V\lambda_k)}$.
3. O modo zero é plano; ao longo do vetor unitário $(1,\ldots,1)/\sqrt{n}$ o toro $[-\pi,\pi]^n$ se fecha após um comprimento $2\pi\sqrt{n}$.
4. Junte tudo, com o prefator $(2\pi)^{-n}$:

$$\frac{\mathrm{Tr}\rho_{A,Q}^n}{\mathrm{Tr}\rho_A^n} = \frac{2\pi\sqrt{n}}{(2\pi)^n}\prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{2\pi}{V\lambda_k}} = \frac{2\pi\sqrt{n}}{(2\pi)^n}\frac{(2\pi/V)^{\frac{n-1}{2}}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi V)^{-\frac{n-1}{2}}.$$

5. Tome $\frac{1}{1-n}\log$:

Resultado principal

$$\Delta S_A^{(n)} = \frac{1}{2}\log(2\pi V) + \frac{\log n}{2(n-1)} \qquad \left(n=2:\ \frac{1}{2}\log(2\pi V) + \frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2}\log(4\pi V)\ \checkmark\right)$$

Demonstração de que todas as larguras das réplicas são iguais

1. Em $Z_n(\vec{u})$ a fase $e^{iu_r Q_A}$ veste só a folha r. No interior da janela, as n folhas são contraídas por $\bigotimes_{r=1}^{n} \mathcal{T}_{u_r}^{L}$ — um produto tensorial, folha por folha.
2. A colagem cíclica (bra da folha r com ket da folha $r{+}1$) é uma permutação de índices de ligação. O interior é uniforme; então ela pode ser empurrada para as duas pontas de A e absorvida em tensores de fronteira $\mathcal{B}_{L,R}$.
3. Logo
$$\log Z_n(\vec{u}) = L \sum_{r=1}^{n} \log \lambda(u_r) + \log \mathcal{B}(\vec{u}) + \mathcal{O}(e^{-L/\xi_T}).$$
4. A parte extensiva é uma *soma de funções de uma variável*: sem derivadas mistas $\partial_{u_r}\partial_{u_{r'}}$, $r \neq r'$. Seu termo linear $\propto \sum_r u_r = 0$. Seu termo quadrático é $-\frac{\mathrm{Var}(Q_A)}{2}\sum_r u_r^2 = -\frac{\mathrm{Var}(Q_A)}{2}\sum_r (\alpha_r - \alpha_{r+1})^2$.

Resultado principal

O laplaciano do grafo ciclo com um *único* coeficiente: $V_d = \mathrm{Var}(Q_A)[1 + \mathcal{O}(1/\ell)]$ para todo d e todo inteiro $n \geq 2$. Toda a dependência em d está na hessiana de fronteira limitada $\partial^2 \log \mathcal{B}$.

A fórmula mestra

De $\mathrm{Var}(Q_A)$ a uma susceptibilidade

$$\mathrm{Var}(Q_A) = \frac{1}{4}\sum_{i,j\in A}\langle\sigma_i^z\sigma_j^z\rangle_c \overset{\text{inv. transl.}}{=} \frac{1}{4}\sum_{r}(\ell-|r|)\langle\sigma_0^z\sigma_r^z\rangle_c = \frac{\ell}{4}\sum_{r}\langle\sigma_0^z\sigma_r^z\rangle_c + \mathcal{O}(1),$$

sendo o $\mathcal{O}(1)$ finito porque as correlações decaem exponencialmente. Defina $\chi_{zz} = \frac{1}{2}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\langle\sigma_0^z\sigma_r^z\rangle_c$; então $\mathrm{Var}(Q_A) = \frac{1}{2}\ell\chi_{zz} + \mathcal{O}(1)$.

Fórmula mestra

$$\Delta S_A^{(n)}(\ell) = \frac{1}{2}\log(\pi\,\ell\,\chi_{zz}) + \frac{\log n}{2(n-1)} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{M\ell}\Big), \qquad \Delta S_A \equiv \Delta S_A^{(1)} = \frac{1}{2}\log(\pi e\,\ell\chi_{zz}).$$

$n\to 1$: $\frac{\log n}{2(n-1)} \to \frac{1}{2}$ (L'Hôpital).

A correção é controlada pela razão entre o comprimento de correlação $1/M$ e o tamanho da janela ℓ.

O que é universal, o que é específico do modelo

Usamos só três propriedades

1. Q_A é soma de cargas locais com espectro inteiro;
2. $\log Z_n$ é extensivo com termo dominante quadrático (estatística de carga gaussiana na escala $\sqrt{\ell}$);
3. cluster exponencial (estado fundamental com gap).

Em resumo

Esperado para toda cadeia 1D com gap com uma carga $U(1)$ quebrada explicitamente. A dependência em n não carrega informação do modelo:

$$\Delta S_A^{(2)} - \Delta S_A^{(3)} \to \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4}\log 3 = 0.07192.$$

Específico do modelo: um número

Tudo sobre a cadeia XYZ está em $\chi_{zz}(\gamma, \Delta_z)$. No limite de escala,

$$\chi_{zz} = M \cdot \mathfrak{c}(\beta^2),$$

uma massa da rede M (Passo 3) vezes uma função universal $\mathfrak{c}$ do acoplamento (Passo 2).

Por que χ_{zz}/M é universal

χ_{zz} é "flutuação por comprimento": dimensão 1/comprimento. Numa teoria no contínuo com uma só escala $1/M$, a razão χ_{zz}/M só depende de acoplamentos adimensionais.

Aquecimento: a cadeia XY ($\Delta_z = 0$)

Jordan–Wigner: spins → férmions sem spin

$$\sigma_j^z = 2c_j^\dagger c_j - 1, \qquad \sigma_j^+ = c_j^\dagger \, e^{i\pi \sum_{k<j} c_k^\dagger c_k}.$$

A "corda" faz os c_j anticomutarem. Entre vizinhos as cordas se cancelam: $\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- = c_j^\dagger c_{j+1}$, $\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ = c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger$ (a menos de convenções de sinal que não afetam χ_{zz}).

Usando $\sigma^x\sigma^x + \sigma^y\sigma^y = 2(\sigma^+\sigma^- + \sigma^-\sigma^+)$ e a identidade da anisotropia:

$$H_{XY} = 2\sum_j \left(c_j^\dagger c_{j+1} + \text{h.c.}\right) + 2\gamma \sum_j \left(c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger + \text{h.c.}\right).$$

Em resumo

Hopping mais *criação de pares*: o termo γ cria férmions de dois em dois — a face fermiônica de "Q muda de 2". Com $Q = \sum_j (c_j^\dagger c_j - \frac{1}{2}) = N_f - \frac{N}{2}$, a carga quebrada é o número de férmions.

Cadeia XY: transformada de Fourier e pares de Bogoliubov

1. $c_j = N^{-1/2}\sum_k e^{ikj} c_k$. Hopping: $\sum_j (c_j^\dagger c_{j+1} + \text{h.c.}) = \sum_k 2\cos k\, c_k^\dagger c_k$.
2. Emparelhamento: $\sum_j c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger = \sum_k e^{ik} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger = \sum_k i \sin k\, c_k^\dagger c_{-k}^\dagger$ (antissimetrize em $k \to -k$).
3. Os modos k e $-k$ formam problemas independentes de 2 níveis, gerados por $|0\rangle_k$ e $c_k^\dagger c_{-k}^\dagger |0\rangle_k$:

$$|\mathrm{GS}\rangle = \prod_{0<k<\pi} \left(u_k + v_k\, c_k^\dagger c_{-k}^\dagger\right)|0\rangle, \qquad \varepsilon_k = 4\sqrt{\cos^2 k + \gamma^2 \sin^2 k},$$

$$4|u_k|^2|v_k|^2 = \frac{\gamma^2 \sin^2 k}{\cos^2 k + \gamma^2 \sin^2 k} \quad (\text{emparelhamento}^2/\text{energia}^2).$$

Gap: $\min_k \varepsilon_k = 4\gamma$ em $k = \pi/2$. Velocidade em $\gamma = 0$: $|\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}k| = 4$. Logo $M = \text{gap}/v = \gamma$ para γ pequeno (o comprimento de correlação na rede dá $M = \operatorname{atanh}\gamma$, Passo 3).

ε_k é a energia de uma quasipartícula de Bogoliubov — em $\Delta_z = 0$ essa quasipartícula *é* o kink.

Cadeia XY: a susceptibilidade

1. Cada par $(k, -k)$ está vazio ou duplamente ocupado: seu número de férmions é 0 ou 2 com probabilidades $|u_k|^2, |v_k|^2$. Variância dessa variável de dois valores: $4|u_k|^2|v_k|^2$.
2. Pares independentes: as variâncias se somam: $\mathrm{Var}(Q) = \mathrm{Var}(N_f) = \sum_{0<k<\pi} 4|u_k|^2|v_k|^2$.
3. $\sum_k \to \frac{N}{2\pi}\int \mathrm{d}k$, e $\chi_{zz} = 2\mathrm{Var}(Q)/N$:

$$\chi_{zz} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\gamma^2 \sin^2 k \,\mathrm{d}k}{\cos^2 k + \gamma^2 \sin^2 k} \overset{t=\tan k}{=} \frac{\gamma^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+\gamma^2 t^2)}.$$

4. Frações parciais: $\frac{t^2}{(1+t^2)(1+\gamma^2 t^2)} = \frac{1}{1-\gamma^2}\left[\frac{1}{1+\gamma^2 t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right]$; logo $\chi_{zz} = \frac{\gamma^2}{\pi(1-\gamma^2)}\left(\frac{\pi}{\gamma} - \pi\right)$.

O ponto de férmions livres

$$\chi_{zz} = \frac{\gamma}{1+\gamma}, \qquad M = \operatorname{atanh}\gamma \qquad \Longrightarrow \qquad \mathfrak{c}(\tfrac{1}{2}) = \lim_{\gamma\to 0}\frac{\chi_{zz}}{M} = 1.$$

Flutuações como soma sobre estados excitados

Representação de Lehmann (espectral)

Insira o conjunto completo de autoestados $\mathbb{1} = \sum_n |n\rangle\langle n|$:

$$\mathrm{Var}(Q) = \langle 0|Q^2|0\rangle - \langle 0|Q|0\rangle^2 = \sum_n |\langle n|Q|0\rangle|^2 - |\langle 0|Q|0\rangle|^2 = \sum_{n\neq 0} |\langle n|Q|0\rangle|^2.$$

Trocar Q por $\dot{Q}$

Tome $\langle n| \cdot |0\rangle$ de $\dot{Q} = i[H, Q]$ (energia do estado fundamental $E_0 = 0$): $\langle n|\dot{Q}|0\rangle = iE_n\langle n|Q|0\rangle$; logo $|\langle n|Q|0\rangle|^2 = |\langle n|\dot{Q}|0\rangle|^2/E_n^2$.

Regra de soma de não conservação

$$\chi_{zz} = \frac{2}{L}\mathrm{Var}(Q) = \frac{2}{L}\sum_{n\neq 0}\frac{|\langle n|\dot{Q}|0\rangle|^2}{E_n^2}, \qquad \dot{Q} = -2q\mu\int \mathrm{d}x\ \sin\beta\phi.$$

Ordem dos limites: primeiro $L \to \infty$ (com conteúdo de partículas fixo), depois o limite de escala. $\dot{Q}$ é a integral de um operador *local*, cujos elementos de matriz são conhecidos.

A carga quebrada no contínuo

Resultado principal

$$Q = \frac{q}{\beta}\int \mathrm{d}x\,\Pi(x), \qquad q = 2.$$

Verificando a carga de $e^{i\beta\phi}$

De $[\phi, \Pi] = i$: $[f(\phi), \Pi] = i f'(\phi)$. Logo $[\int \Pi, e^{i\beta\phi}] = -i \cdot i\beta\, e^{i\beta\phi} = \beta\, e^{i\beta\phi}$ e

$$[Q, e^{i\beta\phi}] = q\, e^{i\beta\phi}.$$

$e^{i\beta\phi} \leftrightarrow \sigma^+\sigma^+$ aumenta Q de 2; logo $q = 2$.

Sua derivada temporal

Só $-2\mu\cos\beta\phi$ não comuta com Q: $[\cos\beta\phi, \int \Pi] = -i\beta\sin\beta\phi$; logo $[H, Q] = 2iq\mu\int \sin\beta\phi$ e

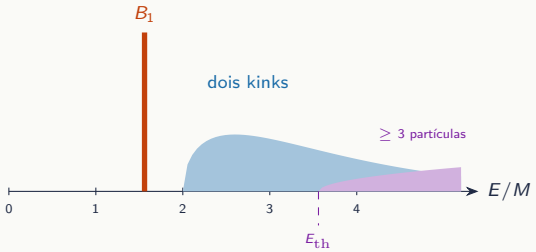
$$\dot{Q} = i[H, Q] = -2q\mu\int \mathrm{d}x\ \sin\beta\phi \neq 0.$$

Normalização

$q = 2$ é fixado no ponto XXZ, onde Q gera a simetria. Ligar γ renormaliza o termo de quebra, não a normalização da corrente conservada.

Quais estados contribuem: um espectro positivo

- Todo termo é ≥ 0. Qualquer subconjunto de estados dá uma **cota inferior** para χ_{zz}.
- **Conjugação de carga** $C : \phi \to -\phi$. $\sin\beta\phi$ é C-ímpar; logo só estados C-ímpares acoplam:
  - o par kink–antikink (combinação ímpar), a partir de $E = 2M$;
  - B_1 (ímpar), em $E = m_{B_1}$;
  - *não* B_2, B_1B_1 (C-pares).
- Desprezados: ≥ 3 partículas, a partir de $E_{\mathrm{th}} = 2M + m_{B_1}$ (atrativo) ou $4M$ (repulsivo).



Esboço do peso $|\langle n|\dot{Q}|0\rangle|^2$ versus energia no lado atrativo.

Partículas em 1+1 dimensões: rapidezes

Rapidez

$$E = M\cosh\theta, \quad p = M\sinh\theta \quad (E^2 - p^2 = M^2).$$

- Um boost de Lorentz desloca todas as rapidezes pelo mesmo valor: quantidades invariantes de Lorentz dependem só das diferenças $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$.
- Estados $|\theta_1, \ldots, \theta_k\rangle_{\epsilon_1 \ldots \epsilon_k}$ (ϵ = tipo de partícula), normalizados como $\langle\theta|\theta'\rangle = 4\pi\delta(\theta - \theta')$, de modo que $\mathbb{1} \ni \int \frac{\mathrm{d}\theta}{4\pi}|\theta\rangle\langle\theta|$.

Integrabilidade

Sine-Gordon tem infinitas leis de conservação. Consequências: o espalhamento é *elástico* (sem produção de partículas) e *fatorizado* (todo processo de muitas partículas é produto de processos de dois corpos). Toda a dinâmica está na matriz S de dois corpos.

Em resumo

Em 1D, as partículas precisam passar "através" umas das outras. Integrabilidade significa que cada encontro só produz uma fase (e possivelmente uma troca de tipo).

A matriz S de sine-Gordon (Zamolodchikov & Zamolodchikov)

O espalhamento sóliton–sóliton é uma fase pura:

$$S_0(\theta) = -\exp\left[i\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t}\, k_0(t)\sin\frac{t\theta}{\pi}\right],$$

$$k_0(t) = \frac{\sinh\frac{(\xi_{\mathrm{sG}}-1)t}{2}}{\sinh\frac{\xi_{\mathrm{sG}}t}{2}\cosh\frac{t}{2}}.$$

Sóliton–antissóliton: transmissão $b(\theta)$ e reflexão $c(\theta)$,

$$b = \frac{\sinh(\theta/\xi_{\mathrm{sG}})}{\sinh\frac{i\pi-\theta}{\xi_{\mathrm{sG}}}}S_0, \quad c = \frac{i\sin(\pi/\xi_{\mathrm{sG}})}{\sinh\frac{i\pi-\theta}{\xi_{\mathrm{sG}}}}S_0.$$

Verificação com férmions livres

$\xi_{\mathrm{sG}} = 1$: $k_0 \equiv 0$, $S_0 = -1$; $\sin\pi = 0$, então $c = 0$ e $b = -1$. Transmissão pura com um sinal: férmions livres.

Em resumo

Polos de b, c na "faixa física" $0 < \mathrm{Im}\,\theta < \pi$ só aparecem para $\xi_{\mathrm{sG}} < 1$; são os breathers. Pontos sem reflexão $\xi_{\mathrm{sG}} = 1/N$: $c = 0$.

Fatores de forma

Fator de forma

O elemento de matriz de um operador local entre o vácuo e um estado assintótico de muitas partículas: $F^{\mathcal{O}}_{\epsilon_1\dots\epsilon_k}(\theta_1,\dots,\theta_k) = \langle 0|\mathcal{O}(0)|\theta_1,\dots,\theta_k\rangle_{\epsilon_1\dots\epsilon_k}$.

Axiomas (duas partículas, $F(\theta)$, $\theta = \theta_{12}$):

1. **Watson**: $F(\theta) = S(\theta)F(-\theta)$ — trocar as partículas custa a matriz S.
2. **Cruzamento**: $F(\theta + 2\pi i) = F(-\theta)$.
3. **Polos**: estados ligados aparecem como polos simples; os resíduos dão o fator de forma do estado ligado.
4. **Crescimento**: $|F| \lesssim e^{\Delta_{\mathcal{O}}|\theta|/2}$ para $|\theta|$ grande ($\Delta_{\mathcal{O}}$ = dimensão de escala).

Em resumo

Um fator de forma é a "amplitude para criar" um dado conjunto de partículas cutucando o vácuo com $\mathcal{O}$. Ao quadrado, é o peso desse estado na regra de soma.

Unicidade

1–2 fixam F a menos de um fator que as resolve trivialmente (fator CDD). A solução *mínima* não tem zeros/polos extras. 3–4 então excluem a liberdade CDD aqui.

O fator de forma de dois kinks da fonte de quebra

Fator de forma C-ímpar de dois kinks (de Lukyanov 1997)

$$F^{\sin}(\theta) = \frac{M^2}{2\mu\beta^2}\cosh\frac{\theta}{2}\,\mathcal{F}(\theta), \qquad \mathcal{F}(\theta) = \frac{\sinh\frac{\theta}{2}\; e^{\mathcal{J}(\theta)}}{\cosh\frac{\theta+i\pi}{2\xi_{\mathrm{sG}}}},$$

$$\mathcal{J}(\theta) = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t}\,\frac{k_0(t)}{\sinh t}\,\sin^2\frac{t(i\pi+\theta)}{2\pi}.$$

- $\sinh\frac{\theta}{2}$: anula-se no limiar $\theta = 0$ (um par C-ímpar não pode ficar em repouso junto).
- $e^{\mathcal{J}}$: a solução mínima de Watson + cruzamento com a matriz S de sólitons.
- $1/\cosh\frac{\theta+i\pi}{2\xi_{\mathrm{sG}}}$: polo em $\theta = -i\pi(1-\xi_{\mathrm{sG}}) \leftrightarrow$ estado ligado B_1 (físico só se $\xi_{\mathrm{sG}} < 1$).

Verificações feitas

(a) $\xi_{\mathrm{sG}} = 1$: $k_0 = 0 \Rightarrow \mathcal{J} = 0$ e $\mathcal{F} \equiv 1$.
(b) Watson com o autovalor C-ímpar $c - b$.
(c) $|\mathcal{F}| \sim e^{(\xi_{\mathrm{sG}}-1)|\theta|/4\xi_{\mathrm{sG}}}$: abaixo da cota UV $e^{\beta^2|\theta|}$, com margem $\frac{(\xi_{\mathrm{sG}}-1)^2}{4\xi_{\mathrm{sG}}(\xi_{\mathrm{sG}}+1)}$, que só fecha em $\xi_{\mathrm{sG}} = 1$.
(d) Concorda com uma representação independente de Karowski–Weisz.

Fixando a normalização: uma identidade da equação de movimento

Os fatores de forma de Lukyanov carregam o valor esperado no vácuo $\mathcal{G}_\beta = \langle e^{i\beta\phi}\rangle = \langle \cos\beta\phi\rangle$. Nós o trocamos por M e μ:

Via Hellmann–Feynman

1. Densidade de energia do estado fundamental $f(\mu)$: $\partial f/\partial\mu = \langle \partial\mathcal{H}/\partial\mu\rangle = -2\mathcal{G}_\beta$.
2. Dimensões: $f \propto M^2 \propto \mu^{1/(1-\beta^2)}$; logo $\mu\,\partial_\mu f = f/(1-\beta^2)$.
3. Assim, $\mathcal{G}_\beta = -\dfrac{f}{2(1-\beta^2)\mu}$.
4. Energia de volume conhecida (Zamolodchikov; Destri–de Vega): $f = -\frac{M^2}{4}\tan\frac{\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2}$.
5. Com $\frac{1}{1-\beta^2} = 1+\xi_{\mathrm{sG}} = \frac{\xi_{\mathrm{sG}}}{\beta^2}$:

Resultado principal

$$\mathcal{G}_\beta \cot\frac{\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2} = \frac{M^2\xi_{\mathrm{sG}}}{8\mu\beta^2}.$$

Também decorre da EDM $\sin\beta\phi = -\Box\phi/(16\pi\mu\beta)$; para $\xi_{\mathrm{sG}} \geq 1$ continua o valor de vácuo de LZ.

◂ Voltar ao slide 39 ▸ Conteúdo

Contribuição de dois kinks: a derivação

1. Estados de duas partículas: $\sum_n \to \int \frac{\mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\theta_2}{(4\pi)^2}$ (atribuições de carga incluídas). Invariância por translação: $\langle\theta_1\theta_2| \int \mathrm{d}x \sin\beta\phi|0\rangle = 2\pi\delta(P)\, F^{\sin}(\theta_{12})$.
2. Ao quadrado: $[2\pi\delta(P)]^2 = 2\pi\delta(P)\cdot 2\pi\delta(0) = 2\pi\delta(P)\, L$. *O L cancela o $1/L$.*
3. $\delta(M\sinh\theta_1 + M\sinh\theta_2) = \delta(\theta_1+\theta_2)/(M\cosh\theta)$: o par tem $\theta_1 = -\theta_2 = \theta$, $E = 2M\cosh\theta$, $\theta_{12} = 2\theta$.
4. Juntando: $\chi_{2\mathrm{k}} = \dfrac{(2q\mu)^2}{16\pi M^3}\displaystyle\int \mathrm{d}\theta \frac{|F^{\sin}(2\theta)|^2}{\cosh^3\theta}$.
5. Insira $F^{\sin}(2\theta) = \frac{M^2}{2\mu\beta^2}\cosh\theta\,\mathcal{F}(2\theta)$: duas potências de $\cosh\theta$ se cancelam, e μ desaparece.

Resultado principal

$$\mathfrak{c}_{2\mathrm{k}} = \frac{\chi_{2\mathrm{k}}}{M} = \frac{q^2}{16\pi\beta^4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\theta\,\frac{|\mathcal{F}(2\theta)|^2}{\cosh\theta} \equiv \frac{(1+\xi_{\mathrm{sG}})^2}{4\pi\xi_{\mathrm{sG}}^2}J_1.$$

Verificação em $\xi_{\mathrm{sG}} = 1$: $\mathcal{F} = 1$, $J_1 = \int \operatorname{sech}\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi \Rightarrow \mathfrak{c}_{2\mathrm{k}} = 1$ (âncora XY).

Contribuição de um breather

Uma partícula em repouso

$\sum_n \to \int \frac{\mathrm{d}\theta}{4\pi}$; $\delta(m_1 \sinh\theta) = \delta(\theta)/m_1$; $E = m_1$:

$$\chi_{B_1} = \frac{(2q\mu)^2 |F^{\sin}_{B_1}|^2}{m_1^3}, \qquad m_1 = 2M \sin\frac{\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2}.$$

Elemento de matriz do breather de Lukyanov, $F^{\sin}_{B_1} = \sqrt{2}\lambda(\xi_{\mathrm{sG}})\mathcal{G}_\beta$; elimine $\mathcal{G}_\beta$ com a identidade da EDM.

Resultado principal

$$\mathfrak{c}_{B_1} = \frac{(1+\xi_{\mathrm{sG}})^2}{2}\left(\tan\frac{\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2}\right)^{-\xi_{\mathrm{sG}}} e^{\eta(\xi_{\mathrm{sG}})},$$

$\eta(\xi) = \frac{1}{2\pi}[\mathrm{Cl}_2(2\pi\xi) - 4\,\mathrm{Cl}_2(\pi\xi)]$, com a função de Clausen $\mathrm{Cl}_2(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{\sin kx}{k^2}$.

De onde vem Clausen

Resultado bruto:

$$\mathfrak{c}_{B_1} = \frac{(1+\xi)^2}{2} \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi\xi} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sin t}\right),$$

e

$$\int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sin t} = x\log\tan\tfrac{x}{2} + 2\mathrm{Cl}_2(x) - \tfrac{1}{2}\mathrm{Cl}_2(2x).$$

ξ_{sG}	$\mathfrak{c}_{B_1}$	nota
$\to 0$	$\frac{1}{2}$	B_1 carrega tudo
0.55	0.61719	
0.70	0.53689	
$\to 1^-$	$\pi(1-\xi_{\mathrm{sG}})$	anula-se linearmente

(Forma fechada e quadratura direta concordam até 10^{-11}.)

Mais informação: momentos espectrais

Momentos do mesmo peso espectral

$$T_j = \frac{2}{L}\sum_{n\neq 0} E_n^j \,|\langle n|Q|0\rangle|^2, \qquad T_0 = \chi_{zz}.$$

As partes de dois kinks e de B_1 seguem da mesma medida:

$$T_j^{2\mathrm{k}} = \frac{q^2 M^{1+j}}{16\pi\beta^4}\int \mathrm{d}\theta \frac{|\mathcal{F}(2\theta)|^2}{\cosh\theta}(2\cosh\theta)^j,$$

$$T_j^{B_1} = M c_{B_1} m_1^j.$$

($j=-1,0,1$ envolvem J_2, J_1, J_0 com $J_k = \int |\mathcal{F}(2\theta)|^2 \mathrm{sech}^k\theta \,\mathrm{d}\theta$.)

Em resumo

T_0 é o que queremos. T_{-1} e T_{+1} podem ser calculados por outros meios (próximos dois slides). Comparar os totais com as partes de dois kinks+B_1 diz quanto peso os estados desprezados carregam, e onde.

T_{-1}: resposta a um campo acoplado a Q

Completando o quadrado

1. Adicione um campo uniforme: $H(h) = H - hQ = \int \left[4\pi\Pi^2 - \frac{hq}{\beta}\Pi + \frac{1}{16\pi}(\partial_x\phi)^2 - 2\mu\cos\beta\phi\right]$.
2. $4\pi\Pi^2 - \frac{hq}{\beta}\Pi = 4\pi\left(\Pi - \frac{hq}{8\pi\beta}\right)^2 - \frac{h^2q^2}{16\pi\beta^2}$.
3. O deslocamento $\Pi \to \Pi + \lambda$ é uma conjugação unitária por $e^{i\lambda\int\phi}$, que comuta com todo termo que depende de ϕ. Logo o espectro não muda, exceto por uma constante:
$$E_0(h) = E_0(0) - \frac{h^2q^2}{16\pi\beta^2}L.$$
4. Teoria de perturbação de segunda ordem diz $E_0(h) = E_0 - h^2\sum_{n\neq 0}|\langle n|Q|0\rangle|^2/E_n + \ldots$

Resultado principal

$$T_{-1} = \frac{2}{L}\sum_{n\neq 0}\frac{|\langle n|Q|0\rangle|^2}{E_n} = \frac{q^2}{8\pi\beta^2} = \frac{1+\xi_{\mathrm{sG}}}{2\pi\xi_{\mathrm{sG}}} \quad \text{para todo acoplamento.}$$

Na rede: a susceptibilidade a campo uniforme tende ao valor XXZ $K/\pi v$; o gap não a suprime.

◂ Voltar ao slide 39 ▸ Conteúdo

T_{+1}: a regra de soma f da carga quebrada

1. Identidade: $\frac{1}{2}\langle 0|[Q,[H,Q]]|0\rangle = \sum_n E_n |\langle n|Q|0\rangle|^2$ (expanda os comutadores, insira $\sum_n |n\rangle\langle n|$).
2. $[H,Q] = 2iq\mu \int \sin\beta\phi$ e $[Q,\sin\beta\phi] = -iq\cos\beta\phi$; logo $[Q,[H,Q]] = 2q^2\mu\int\cos\beta\phi$ e $\frac{1}{2}\langle\cdots\rangle = q^2\mu L\mathcal{G}_\beta$.
3. $T_{+1} = 2q^2\mu\mathcal{G}_\beta$; use a identidade da EDM $\mathcal{G}_\beta = \frac{M^2\xi_{\rm sG}}{8\mu\beta^2}\tan\frac{\pi\xi_{\rm sG}}{2}$.

Resultado principal

$$T_{+1} = \frac{q^2M^2}{4}(1+\xi_{\rm sG})\tan\frac{\pi\xi_{\rm sG}}{2} \qquad (\xi_{\rm sG} < 1).$$

Atenção

Para $\xi_{\rm sG} \geq 1$ a soma diverge em alta energia (o integrando de dois kinks de J_0 cresce como $e^{(\xi_{\rm sG}-1)|\theta|/\xi_{\rm sG}}$), de acordo com o polo de $\tan\frac{\pi\xi_{\rm sG}}{2}$ em $\xi_{\rm sG} = 1$. Só T_{-1} está disponível no lado repulsivo.

Um corredor de dois lados para a cauda desprezada

Subtraia as partes de dois kinks+B_1. O que sobra é uma medida positiva $\mathrm{d}\sigma(E)$ para a cauda de ≥ 3 partículas, vivendo em $E \geq E_{\mathrm{th}}$, com momentos

$$r_{-1} = \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{E}, \quad M\mathfrak{c}_{\mathrm{cauda}} = \int \mathrm{d}\sigma, \quad M^2 r_{+1} = \int E\,\mathrm{d}\sigma.$$

Duas desigualdades

Inferior: $E \geq E_{\mathrm{th}} \Rightarrow \int \mathrm{d}\sigma = \int E\frac{\mathrm{d}\sigma}{E} \geq E_{\mathrm{th}} r_{-1}$.
Superior (Cauchy–Schwarz):

$$\left(\int E^{-\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\sigma\right)^2 \leq \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{E} \int E\,\mathrm{d}\sigma.$$

Corredor (E_{th} em unidades de M)

$$E_{\mathrm{th}} r_{-1} \leq \mathfrak{c}_{\mathrm{cauda}} \leq \sqrt{r_{+1} r_{-1}} \quad (\xi_{\mathrm{sG}} < 1)$$

$$\mathfrak{c}_{\mathrm{cauda}} \geq 4 r_{-1} \quad (\xi_{\mathrm{sG}} > 1)$$

As duas bordas são atingidas por medidas permitidas (todo o peso numa energia; ou no limiar mais peso escapando para o infinito): os dois momentos não contêm mais informação.

Exemplo $\xi_{\mathrm{sG}} = 0.55$: $E_{\mathrm{th}} = 2 + 2\sin(0.275\pi) = 3.5208$, $r_{-1} = 7.07 \times 10^{-4}$: $\mathfrak{c} \in [0.76132, 0.76981]$; o iDMRG dá 0.769(4).

O ponto de férmions livres: uma lei da tangente (1/2)

Resultado principal

$$\mathfrak{c}(\beta^2) = 1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)(\xi_{\mathrm{sG}} - 1) + \mathcal{O}\big((\xi_{\mathrm{sG}} - 1)^2\big) \quad \text{dos dois lados.}$$

Parte suave de J_1

Da representação de $\mathcal{F}$: $\partial_\xi \log|\mathcal{F}(u)|^2\big|_{\xi=1} = 1 + u\coth\frac{u}{2} - \frac{u}{2}\tanh\frac{u}{2}$. Com $u = 2\theta$ e peso $\operatorname{sech}\theta$:

$$\int \operatorname{sech}\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi, \quad \int 2\theta\coth\theta\operatorname{sech}\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi^2, \quad \int \theta\tanh\theta\operatorname{sech}\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi$$

$\Rightarrow$ inclinação suave $\partial_\xi J_1|_1 = \pi + \pi^2 - \pi = \pi^2$.

O entalhe

O polo de B_1 em $u = -i\pi(1-\xi)$ fica ao lado do limiar e cava uma depressão $|\mathcal{F}|^2 \simeq \theta^2/(\theta^2 + w^2)$, $w = \pi|\xi - 1|/2$. Peso removido: $\int \frac{w^2}{\theta^2+w^2}\mathrm{d}\theta = \pi w = \frac{\pi^2}{2}|\xi - 1|$, *dos dois* lados de $\xi = 1$.

O ponto de férmions livres: uma lei da tangente (2/2)

Inclinações laterais

Uma perda $\propto |\xi - 1|$ reduz a inclinação à direita e aumenta a da esquerda:

$$J_1'(1^+) = \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}, \qquad J_1'(1^-) = \pi^2 + \frac{\pi^2}{2} = \frac{3\pi^2}{2}.$$

O prefator $\frac{(1+\xi)^2}{4\pi\xi^2}$ vale $\frac{1}{\pi}$ e tem inclinação $-\frac{1}{\pi}$ em $\xi = 1$: $\mathfrak{c}_{2\mathrm{k}}' = -1 + J_1'/\pi$; logo

$$\mathfrak{c}_{2\mathrm{k}}'(1^+) = \frac{\pi}{2} - 1, \qquad \mathfrak{c}_{2\mathrm{k}}'(1^-) = \frac{3\pi}{2} - 1.$$

O breather preenche a diferença

$\mathfrak{c}_{B_1} \simeq \pi(1 - \xi)$ tem inclinação $-\pi$, cancelando o excesso π: inclinação total $\frac{\pi}{2} - 1$ dos dois lados.

Em resumo

Quando $\xi \to 1^-$ o breather se funde ao limiar de dois kinks e seu peso flui continuamente para o contínuo. Isso também testa a normalização de B_1 de Lukyanov.

A cauda de quatro kinks perto do ponto de férmions livres

- Em $\xi_{\mathrm{sG}} = 1$, sine-Gordon é um férmion de Dirac massivo livre (Coleman), e $\sin\beta\phi \to \frac{M}{4\mu\beta^2}\bar\psi i\gamma^5\psi$, um *bilinear* fermiônico.
- Um bilinear só cria um par partícula–antipartícula: seu fator de forma conexo de quatro partículas é **zero**. Todos os canais de ≥ 3 partículas se desligam.
- Longe de $\xi_{\mathrm{sG}} = 1$: interação de Thirring $-\frac{g}{2}(\bar\psi\gamma^\mu\psi)^2$, $g = -\frac{\pi}{2}(\xi_{\mathrm{sG}} - 1) + \ldots$ O fator de forma de quatro partículas é $\mathcal{O}(g)$; seu quadrado, $\mathcal{O}(g^2)$:

$$\mathfrak{c}_{4\mathrm{k}} = A(\xi_{\mathrm{sG}} - 1)^2 + \ldots$$

Coeficiente

$$A = \frac{\pi^2}{12}J,$$

$$J = \frac{6}{128\pi^3}\int \mathrm{d}^3\theta\, \frac{|f_{++--}|^2}{(\sum_i \cosh\theta_i)^2 \cosh\theta_4},$$

θ_4 fixado por $\sum_i \sinh\theta_i = 0$; f = amplitude de Thirring de um vértice (contração de Wick, um propagador interno com $k^2 \geq 9M^2$).

A receita de JKM para a massa do kink

Mapeie H no regime principal do modelo de oito vértices (por unitárias que trocam eixos e invertem pares de sinais dos acoplamentos). Isso fixa a anisotropia Γ e a assimetria Δ de Baxter:

$$\Gamma = \frac{\Delta_z}{1-\gamma}, \qquad \Delta = -\frac{1+\gamma}{1-\gamma}.$$

Depois, em ordem

$$I = \sqrt{\frac{(1-\gamma)^2 - \Delta_z^2}{(1+\gamma)^2 - \Delta_z^2}}, \qquad \mu_{\mathrm{e}} = \frac{\pi\,[K(I') - F(\arcsin\Gamma; I')]}{2K(I')},$$

$$\epsilon = \mu_{\mathrm{e}}\frac{K(I')}{K(I)}, \quad x = e^{-\epsilon}, \quad k_1' = \frac{\vartheta_4^2(0,x)}{\vartheta_3^2(0,x)}, \qquad \boxed{M = \operatorname{atanh} k_1'}.$$

μ_{e}: "parâmetro de Poincaré"; $\mu_{\mathrm{e}} < \pi/2$ para $\Delta_z > 0$, $= \pi/2$ em $\Delta_z = 0$, $> \pi/2$ para $\Delta_z < 0$ (ramo dos breathers).

Comprimento de correlação de $\sigma^z\sigma^z$: $1/2M$ (limiar de dois kinks) para $\Delta_z \geq 0$, $1/m_{B_1}$ para $\Delta_z < 0$.

As ferramentas elípticas

Integrais elípticas (módulo k)

$$F(\varphi;k)=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}},\qquad K(k)=F(\tfrac{\pi}{2};k),$$

módulo complementar $k'=\sqrt{1-k^2}$. $K(k)\to\frac{\pi}{2}$ quando $k\to 0$; $K(k)\simeq\log\frac{4}{k'}$ quando $k\to 1$.

Funções teta de Jacobi (nomo x)

$\vartheta_3(0,x)=1+2\sum_{n\geq 1}x^{n^2}$,
$\vartheta_4(0,x)=1+2\sum_{n\geq 1}(-1)^n x^{n^2}$.

dn de Jacobi

Se $u=F(\varphi;k)$, então
$\mathrm{dn}(u;k)=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$.

Em resumo

Funções elípticas são a "trigonometria" dos modelos de rede 2D exatamente solúveis. Uma transformação de *Landen* ou *modular* relaciona funções em módulos/nomos diferentes; é assim que se extraem leis de potência quando $\gamma\to 0$.

O acoplamento rede–contínuo e o breather

Amplitude do acoplamento de quebra

Sine-Gordon: $\mu = \kappa(\beta^2) M^{2-2\beta^2}$ com

$$\kappa(\beta^2) = \frac{\Gamma(\beta^2)}{\pi\Gamma(1-\beta^2)} \left[\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\!\left(\frac{1+\xi_{\mathrm{sG}}}{2}\right)}{2\Gamma\!\left(\frac{\xi_{\mathrm{sG}}}{2}\right)} \right]^{2-2\beta^2}.$$

Rede: $\mu = \gamma \mathcal{C}$. Comparando com a lei de potência acima:

$$\mathcal{C}(\Delta_z) = \kappa(\beta^2) \frac{4^{1-2\beta^2}}{1-\Delta_z^2}.$$

$\Delta_z = 0$: $\kappa = \frac{1}{2\pi}$, $\mathcal{C} = \frac{1}{2\pi}$.

Massa do breather ($\Delta_z < 0$)

$$m_{B_1} = 2\left[\operatorname{atanh} k_1' + \log \operatorname{dn}(w; k_2')\right],$$

$k_2 = \frac{1-k_1'}{1+k_1'}$, $w = \frac{2K(k_2)K(l')(\mu_{\mathrm{e}} - \pi/2)}{\pi K(l)}$.

Quando $\gamma \to 0$: $k_2' \to 0$,
$w \to w_\infty = \frac{\pi}{4}(1 - \xi_{\mathrm{sG}})$, e a razão de massas tende a $\cos 2w_\infty$:

$$\frac{m_{B_1}}{2M} \to \sin \frac{\pi \xi_{\mathrm{sG}}}{2} \quad \text{(lei de sine-Gordon)}.$$

Apêndice E — Confirmação numérica (iDMRG)

Parte numérica

1. O estado fundamental da cadeia XYZ **infinita**, num vácuo Néel-x.
2. $\chi_{zz} = \frac{1}{2}\sum_r \langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_c$ com precisão relativa $\sim 10^{-5}$, em γ pequeno, onde os comprimentos de correlação chegam a ~ 20 sítios.
3. Matrizes densidade reduzidas de janelas A de até $\ell = 64$ sítios, e seus momentos carregados Z_n, para testar a fórmula mestra *diretamente*.

Atenção

A diagonalização exata chega a $N \approx 30$–40 spins num anel finito. Anéis finitos também restauram a simetria $\mathbb{Z}_2$ (um estado gato) e adicionam efeitos de tamanho finito. Nenhum dos dois é aceitável aqui.

A ferramenta

iDMRG: o grupo de renormalização da matriz densidade para sistema infinito, que encontra a melhor aproximação do estado fundamental por um **estado de produto de matrizes** (MPS) diretamente no limite termodinâmico.

Plano desta parte

Decomposição de Schmidt → lei de área → MPS → matrizes de transferência → MPO → DMRG → iDMRG → nossas rodadas → medições → extrapolação → assimetria direta.

A decomposição de Schmidt através de um corte

Corte a cadeia numa parte esquerda L e numa parte direita R. Qualquer estado $|\psi\rangle = \sum_{i,j} C_{ij}|i\rangle_L|j\rangle_R$ define uma matriz C. Sua **decomposição em valores singulares** $C = USV^\dagger$ (U, V unitárias, S diagonal ≥ 0) dá

$$|\psi\rangle = \sum_{a=1}^{r} \lambda_a \, |a\rangle_L|a\rangle_R, \qquad \sum_a \lambda_a^2 = 1,$$

com $|a\rangle_L = \sum_i U_{ia}|i\rangle_L$, $|a\rangle_R = \sum_j V^*_{ja}|j\rangle_R$ ortonormais.

Consequências

$\rho_L = \sum_a \lambda_a^2 |a\rangle\langle a|$: os valores de Schmidt ao quadrado são os autovalores da matriz densidade reduzida. Entropia de emaranhamento $S = -\sum_a \lambda_a^2 \log \lambda_a^2$.



Em resumo

Os valores de Schmidt λ_a dizem quantos "canais" de correlação atravessam o corte. Um só λ não nulo: estado produto. Muitos λ comparáveis: emaranhamento forte.

Truncamento

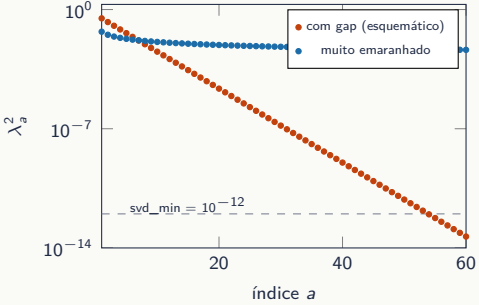
Manter só os χ maiores λ_a dá a melhor aproximação com χ canais; o erro quadrático é $\epsilon = \sum_{a>\chi} \lambda_a^2$ (o "peso descartado").

Por que cadeias com gap são baratas: a lei de área

Lei de área (Hastings 2007)

O estado fundamental de um hamiltoniano 1D local com gap tem entropia de emaranhamento através de qualquer corte limitada por uma constante, independente do tamanho.

- Estado aleatório: $S \propto$ (tamanho); valores de Schmidt todos comparáveis.
- Com gap: os valores de Schmidt decaem rápido. Na XYZ, a matriz de transferência de canto de Baxter mostra que o espectro de emaranhamento $-\log \lambda_a^2$ tem espaçamento $\mathcal{O}(1)$: decaimento geométrico de λ_a.
- Um χ fixo e moderado basta para qualquer comprimento — mesmo infinito.



Estados de produto de matrizes: construindo um com SVDs repetidas

Reescrevendo qualquer estado

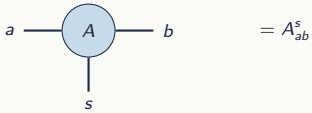
1. Veja $\psi_{s_1 s_2 \cdots s_N}$ como uma matriz com índice de linha s_1 e índice de coluna $(s_2 \cdots s_N)$; SVD: $\psi = \sum_{a_1} U_{s_1,a_1} \, [SV^\dagger]_{a_1,(s_2 \cdots s_N)}$. Chame $A^{s_1}_{1,a_1} = U_{s_1,a_1}$.
2. Reorganize o resto com índice de linha $(a_1 s_2)$ e faça SVD de novo: $A^{s_2}_{a_1 a_2}$. Repita até o fim.
3. Resultado:
$$|\psi\rangle = \sum_{s_1 \cdots s_N} A^{s_1} A^{s_2} \cdots A^{s_N} |s_1 s_2 \cdots s_N\rangle,$$
cada A^s uma matriz (a primeira/última são vetores linha/coluna).

A dimensão da matriz em cada ligação é igual ao número de valores de Schmidt através daquele corte. Truncar cada uma em χ (a **dimensão de ligação**) dá um MPS de $N\,d\,\chi^2$ números, em vez de d^N ($d = 2$).

Exemplo: $N = 100$, $\chi = 160$: 5×10^6 números contra 10^{30}.

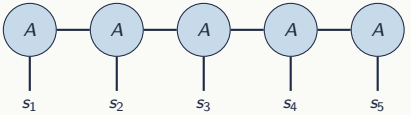
Notação gráfica para tensores

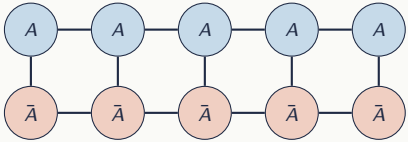
- Um tensor é uma forma; cada índice é uma perna. Uma matriz tem duas pernas; um vetor, uma.
- Unir duas pernas = somar sobre aquele índice (contração).
- Um tensor de MPS A^s_{ab} tem três pernas: ligação esquerda a, ligação direita b, física s.



$= A^s_{ab}$

$|\psi\rangle$ como MPS





$\langle\psi|\psi\rangle$: contraia as pernas físicas

Liberdade de gauge e formas canônicas

- $A^{s_j} A^{s_{j+1}} = (A^{s_j} X)(X^{-1} A^{s_{j+1}})$: o mesmo estado tem muitos MPS. Fixe a liberdade:

Formas canônicas

Normalizado à esquerda: $\sum_s A^{s\dagger} A^s = \mathbb{1}$.
Normalizado à direita: $\sum_s B^s B^{s\dagger} = \mathbb{1}$.

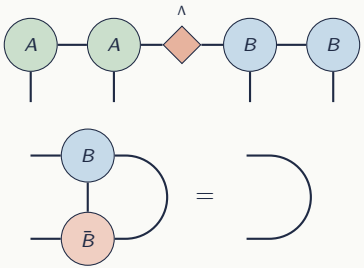
Canônico misto:

$$|\psi\rangle = \sum_{\vec{s}} A^{s_1} \cdots A^{s_j} \Lambda B^{s_{j+1}} \cdots B^{s_N} |\vec{s}\rangle,$$

com $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_a)$ os **valores de Schmidt** do corte $j|j{+}1$.

Em resumo

Na forma canônica mista, tudo à esquerda do corte é uma base ortonormal $|a\rangle_L$, tudo à direita é $|a\rangle_R$: ela *é* a decomposição de Schmidt.



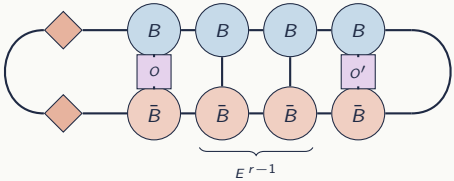
normalização à direita: $\sum_s B^s B^{s\dagger} = \mathbb{1}$

MPS infinito e a matriz de transferência

- **iMPS**: uma célula unitária de u tensores repetida para sempre (aqui $u = 2$: B_1, B_2), mais os valores de Schmidt λ numa ligação.
- **Matriz de transferência** de um sítio: $E = \sum_s B^s \otimes \bar{B}^s$, uma matriz $\chi^2 \times \chi^2$.
- Normalização à direita $\Rightarrow$ E tem autovalor 1 (autovetor $\mathbb{1}$). Para um MPS *injetivo*, ele é único e todos os outros têm $|\lambda_i| < 1$.

Funções de correlação

$\langle O_0 O'_r \rangle =$ (fronteira esquerda) $E_O\, E^{\,r-1} E_{O'}$ (fronteira direita), onde $E_O = \sum_{ss'} O_{s's} B^s \otimes \bar{B}^{s'}$. Expandindo E^{r-1} em autovalores: $\langle O_0 O'_r \rangle_c \sim \lambda_2^r$; logo $\xi = -u/\log|\lambda_2|$ por célula.



Em resumo

Um MPS com gap ("injetivo") tem automaticamente correlações com decaimento exponencial: a matriz de transferência tem um gap entre 1 e $|\lambda_2|$.

O hamiltoniano como operador de produto de matrizes (MPO)

Uma soma de termos locais é um produto de pequenas matrizes de operadores:

$$H = \vec{v}_L^{\,\mathsf{T}}\, W_1 W_2 \cdots W_N\, \vec{v}_R,$$

$$W = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma^x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma^y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma^z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_x\sigma^x & J_y\sigma^y & J_z\sigma^z & \mathbb{1} \end{pmatrix},$$

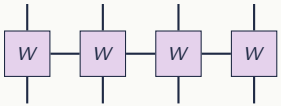
$\vec{v}_L^{\,\mathsf{T}} = (0,0,0,0,1)$, $\vec{v}_R = (1,0,0,0,0)^{\mathsf{T}}$, $J_x = 1+\gamma$, $J_y = 1-\gamma$, $J_z = \Delta_z$.

Verificação com dois sítios

$(W_1 W_2)_{51} = \sum_k W_1[5,k]\, W_2[k,1] =$
$J_x\sigma^x \otimes \sigma^x + J_y\sigma^y \otimes \sigma^y + J_z\sigma^z \otimes \sigma^z$.

Em resumo

Leia W como máquina de estados finitos: estado 5 = "termos ainda à direita"; emitir $J_a\sigma^a$ leva ao estado a; o próximo sítio emite o σ^a correspondente e vai ao estado 1 = "termo concluído". Dimensão de ligação do MPO: $D = 5$.



DMRG: uma busca variacional dentro dos MPS

Princípio variacional

$$E[\psi] = \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \geq E_0,$$

com igualdade só para o estado fundamental.

- Minimize E sobre todos os MPS de dimensão de ligação χ.
- Difícil demais de uma vez (não linear nos tensores). O DMRG (White 1992) otimiza *dois sítios vizinhos de cada vez*, mantendo os demais fixos, e varre para lá e para cá.
- Com o resto em forma canônica, cada problema local é um problema de autovalores comum (pequeno).

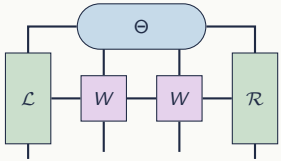


Em resumo

Como ajustar uma longa fila de botões: regule dois de cada vez, siga em frente, volte, até que nada mude. Cada ajuste só pode baixar a energia.

A atualização de dois sítios

1. Funda os dois tensores ativos em $\Theta^{s_j s_{j+1}}_{ab}$ ($\chi \cdot d \cdot d \cdot \chi$ números).
2. Contraia tudo à esquerda num **ambiente** $\mathcal{L}$, tudo à direita em $\mathcal{R}$. O hamiltoniano efetivo é $H_{\text{ef}} = \mathcal{L}\, W_j W_{j+1}\, \mathcal{R}$.
3. Encontre seu menor autovetor pelo método de **Lanczos** (só precisa de produtos $H_{\text{ef}}\Theta$, nunca da matriz inteira): novo Θ, energia E.
4. Separe de volta: SVD $\Theta = U\, S\, V^\dagger$ com $U \to A_j$, $SV^\dagger \to$ próximo.
5. Mantenha os $\chi_{\max}$ maiores valores singulares (e descarte os $<$ `svd_min`). O peso descartado $\epsilon = \sum_{\text{descart.}} \lambda^2$ mede o erro.



$H_{\text{ef}}\,\Theta$

Em resumo

Custo por passo $\sim \chi^3$: com $\chi = 160$ são alguns milhões de operações — barato. A parte cara é repetir vezes suficientes para convergir.

Dentro da atualização: ambientes e o método de Lanczos

Ambientes são construídos recursivamente

Adicionando um sítio ao ambiente esquerdo (a, b: ligações ket/bra; w: ligação do MPO):

$$\mathcal{L}^{[j+1]}_{a'b',w'} = \sum_{a,b,w,s,s'} \mathcal{L}^{[j]}_{ab,w}\, A^{s}_{aa'}\, W^{ss'}_{ww'}\, \bar{A}^{s'}_{bb'},$$

e simetricamente para $\mathcal{R}$. Cada atualização custa $\sim \chi^3 dD$; ambientes antigos são guardados, não recalculados.

Em resumo

$\mathcal{L}$ resume "tudo à esquerda" como visto pelos sítios ativos: um objeto $\chi \times \chi \times D$, por mais longa que seja a parte esquerda.

Lanczos para o menor autovetor

Comece de $v_0 = \Theta$ (o palpite anterior). Construa $v_1, v_2, \ldots$ pela recorrência de três termos

$$\beta_{k+1} v_{k+1} = H_{\mathrm{ef}} v_k - \alpha_k v_k - \beta_k v_{k-1},$$

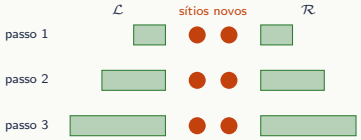
$\alpha_k = v_k^\dagger H_{\mathrm{ef}} v_k$. Na base $\{v_k\}$, H_{ef} é tridiagonal; seu menor autovalor converge para o verdadeiro em algumas dezenas de passos.

Só se precisa de produtos $H_{\mathrm{ef}}\Theta$, calculados contraindo $\mathcal{L}, W, W, \mathcal{R}$ com Θ um tensor de cada vez: nunca uma matriz $(\chi d)^2 \times (\chi d)^2$.

iDMRG: fazendo crescer uma cadeia infinita

Algoritmo de sistema infinito (White 1992; McCulloch 2008)

1. Comece com um sistema minúsculo: bloco esquerdo, dois sítios, bloco direito.
2. Otimize os dois sítios centrais (atualização de dois sítios) com ambientes $\mathcal{L}, \mathcal{R}$.
3. Absorva o novo sítio da esquerda em $\mathcal{L}$ e o da direita em $\mathcal{R}$: o sistema cresceu dois sítios.
4. Insira dois sítios novos no centro, com um bom palpite inicial construído a partir dos Θ e Λ anteriores.
5. Repita até que a energia por sítio e os valores de Schmidt Λ parem de mudar.



No ponto fixo

Os tensores centrais não dependem mais do passo. Repeti-los define um iMPS invariante por translação: *o limite termodinâmico, sem fronteiras e sem extrapolação de tamanho finito.*

No TeNPy, a mesma ideia é organizada como varreduras repetidas pela célula unitária com condições de contorno infinitas: cada varredura estende os ambientes por uma célula unitária.

◂ Voltar ao slide 40 ▸ Conteúdo

Fazendo o iDMRG convergir de forma confiável

- **Misturador**: a atualização de dois sítios pode ficar presa num subespaço sem estados importantes. Uma perturbação pequena e decrescente da matriz densidade reduzida (White 2005) deixa novos estados entrarem. Importante aqui porque nenhuma simetria é usada para organizar a base.
- **Critérios de convergência**: parar quando, de uma varredura para outra, a energia muda menos de 10^{-12} e a entropia de emaranhamento menos de 10^{-10}; pelo menos 25 varreduras.
- **Truncamento**: $\chi \leq 160$, descartar valores singulares abaixo de 10^{-12}.

Escolhas específicas deste problema

Célula unitária de dois sítios. A ordem de Néel tem período 2: um único vácuo com simetria quebrada não é invariante por translação de um sítio.

Nenhuma carga conservada (`conserve=None`). $U(1)_z$ é quebrada por γ. Impor a $\mathbb{Z}_2$ restante forçaria o estado gato, que não satisfaz cluster.

Estado inicial $|{\rightarrow}{\leftarrow}\rangle$ por célula: seleciona um vácuo Néel-x, que o iDMRG então veste com flutuações quânticas.

◂ Voltar ao slide 40 ▸ Conteúdo

Medindo a susceptibilidade

Estimador

Separe $\chi_{zz} = \frac{1}{2}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\langle\sigma^z_0\sigma^z_r\rangle_c$ em $r = 0$ e $\pm r$:

$$\chi_{zz} = \frac{1}{2}\left[1 - \langle\sigma^z\rangle^2\right] + \sum_{r=1}^{R}\overline{\langle\sigma^z_i\sigma^z_{i+r}\rangle_c},$$

($(\sigma^z)^2 = 1$; a barra faz a média de i na célula de 2 sítios). Trunque em $R = 100$–300.

As correlações são calculadas dentro do iMPS por contração de matrizes de transferência (slides anteriores). A cauda além de R decai como e^{-2MR} (lado repulsivo); seu tamanho `tailR`$= |\overline{\langle\cdot\rangle_c}(R)|$ é registrado: $\sim 10^{-9}$ no ponto mais difícil.

```
mz = 2*np.array(psi.expectation_value('Sz'))
cell = np.zeros(R+1)
for i0 in range(2):
    c = 4*psi.correlation_function('Sz','Sz',
          sites1=[i0], sites2=list(range(i0,i0+R
      +1)))[0]
    c = c - mz[i0]*mz[np.arange(i0,i0+R+1)%2]
    cell += c
cell /= 2          # unit-cell average
chizz = 0.5*(1-np.mean(mz**2)) + cell[1:].sum()
```

Em resumo

No vácuo Néel-x, $\langle\sigma^z\rangle = 0$ (simetria por rotação de π em torno de x); então o termo $r = 0$ é $\frac{1}{2}$.

Um ponto de dados, do início ao fim: $(\Delta_z, \gamma) = (0.3, 0.2)$

1. **Estado fundamental.** iDMRG de $|{\rightarrow\leftarrow}\rangle$, célula de 2 sítios, $\chi \leq 160$, até $\delta E < 10^{-12}$, $\delta S < 10^{-10}$.
2. **Correlações.** $\overline{\langle \sigma^z_i \sigma^z_{i+r} \rangle_c}$ para $r = 1, \ldots, R$ por contração de matrizes de transferência; $\langle \sigma^z \rangle = 0$.
3. **Susceptibilidade.** $\chi_{zz} = \frac{1}{2} + \sum_{r \geq 1} \overline{\langle \cdot \rangle_c} = 0.110552$.
4. **Massa.** JKM: $M = 0.108364$ (comprimento de correlação $1/2M = 4.6$ sítios).
5. **Razão.** $\mathfrak{c}(\gamma{=}0.2) = 0.110552/0.108364 = 1.0202$.
6. Repita para $\gamma = 0.10, 0.14, 0.28$; extrapole: $\mathfrak{c}(\beta^2{=}0.597) = 1.289(7)$.
7. Compare com a cota 1.29092 e a borda do corredor 1.29309.

Duas rotas independentes neste ponto

Rota das correlações: $\chi_{zz} = 0.1105$ (passos 1–3).

Rota do emaranhamento: $\Delta S_A^{(2)}(\ell)$ para $\ell = 16 \ldots 56$ do mesmo iMPS; ajuste $c_1 = -0.18343$; inverta $\chi_{zz} = e^{2c_1}/2\pi = 0.1103$.

Concordância de 0.2%: testa a própria fórmula mestra.

Atenção

Com $\Delta_z > 0$, as correlações $\sigma^z\sigma^z$ decaem em $1/2M$ (limiar de dois kinks): R de algumas centenas de sítios basta; o ponto mais difícil, $(0.5, 0.1)$, tem $1/2M \approx 21$.

◂ Voltar ao slide 40 ▸ Conteúdo

$\chi = 160$ basta? Convergência na dimensão de ligação

Ponto mais difícil: $(\Delta_z, \gamma) = (0.5, 0.10)$, $\xi_{\mathrm{sG}} = 2$, $M = 0.023978$, comprimento de correlação $1/2M \approx 21$ sítios, $R = 220$ (`chi_conv.json`):

χ	χ_{zz}	$\mathfrak{c}(\gamma) = \chi_{zz}/M$	variação rel.
64	0.03372554	1.406515	—
96	0.03372290	1.406405	7.8×10^{-5}
128	0.03372255	1.406390	1.0×10^{-5}

Valor de produção com $\chi = 160$: 0.033724.

Resultado principal

χ_{zz} está convergido em χ até $\sim 10^{-5}$, muito abaixo da incerteza da extrapolação $\gamma \to 0$ ($\sim 10^{-2}$ em $\mathfrak{c}$ neste acoplamento).

Por que somas de correlações convergem rápido

χ_{zz} é dominado por distâncias $\lesssim$ alguns comprimentos de correlação, onde um iMPS de χ moderado é preciso. O fator limitante em γ pequeno é o comprimento de correlação crescente, que exige R maior.

Extrapolando $\gamma \to 0$: o conjunto de ajustes

- **Por que não simular γ minúsculo?** $1/M \propto \gamma^{-\pi/2\theta_0}$ cresce rápido, e R (e o tempo) junto. Além disso, $\ell \to \infty$ e $\gamma \to 0$ não comutam.
- **Formas de ajuste** para $\mathfrak{c}(\gamma)$ na grade de quatro pontos:
  1. quadrática pelos 3 menores γ;
  2. quadrática por mínimos quadrados, os 4;
  3. cúbica pelos 4;
  4. **umklapp**: $\mathfrak{c}_0(1 + a\gamma + b\gamma^s)$, expoente *fixo*:

$$s = \frac{(4K-2)\pi}{2\theta_0}, \quad K = \frac{1}{2\beta^2}.$$

- Central: média de cúbica e umklapp. Erro: metade da dispersão das quatro (mín. 0.004).

De onde vem s

Um operador irrelevante da rede, de dimensão $d > 2$, corrige razões adimensionais por $\propto M^{d-2}$. O umklapp da XXZ tem $d = 4K$, e $M \propto \gamma^{\pi/2\theta_0}$: correção $\propto \gamma^{(4K-2)\pi/2\theta_0}$.

A matriz densidade da janela a partir de um iMPS

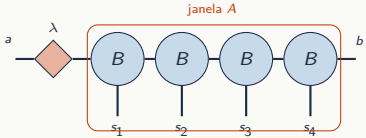
1. Coloque o iMPS em forma canônica mista com o corte na ponta esquerda de A:
   $|\psi\rangle = \sum_{a,b} \lambda_a |a\rangle_{\text{esq}} \otimes |\phi_{ab}\rangle_A \otimes |b\rangle_{\text{dir}}$,

$$|\phi_{ab}\rangle = \sum_{\vec{s}} \left[B^{s_1} B^{s_2} \cdots B^{s_\ell} \right]_{ab} |\vec{s}\rangle.$$

2. Os $|a\rangle_{\text{esq}}$ são ortonormais (estados de Schmidt); os $|b\rangle_{\text{dir}}$ são ortonormais porque os B são normalizados à direita.

3. Trace sobre esquerda e direita:

$$\rho_A = \sum_{a,b} \lambda_a^2 \, |\phi_{ab}\rangle\langle\phi_{ab}|.$$



Em resumo

ρ_A é uma mistura dos estados $|\phi_{ab}\rangle$, rotulados pelo canal de Schmidt que entra à esquerda (a, peso λ_a^2) e pelo que sai à direita (b). Seu posto é no máximo χ^2, por mais longa que seja a janela.

O momento carregado como produto de matrizes de transferência

1. $U = e^{i\alpha Q_A}$ é diagonal em $|\vec{s}\rangle$: $U|\phi_{cd}\rangle = \sum_{\vec{s}} e^{i\alpha q_{\vec{s}}} [B^{s_1} \cdots B^{s_\ell}]_{cd} |\vec{s}\rangle$.
2. $\mathrm{Tr}[\rho_A U \rho_A U^\dagger] = \sum \lambda_a^2 \lambda_c^2 \, \langle\phi_{ab}|U|\phi_{cd}\rangle\langle\phi_{cd}|U^\dagger|\phi_{ab}\rangle = \sum \lambda_a^2 \lambda_c^2 \, |\langle\phi_{ab}|U|\phi_{cd}\rangle|^2$.
3. A sobreposição fatora sítio a sítio: $\langle\phi_{ab}|U|\phi_{cd}\rangle = \left[\mathcal{T}_\alpha^{(1)} \cdots \mathcal{T}_\alpha^{(\ell)}\right]_{(ca),(db)}$, com $\mathcal{T}_\alpha = \sum_s e^{i\alpha m_s} B^s \otimes \bar{B}^s$, $m_s = \pm\frac{1}{2}$.

Resultado principal

$$\mathrm{Tr}[\rho_A e^{i\alpha Q_A} \rho_A e^{-i\alpha Q_A}] = \sum_{a,c} \lambda_a^2 \lambda_c^2 \sum_{b,d} \left| E_\alpha^{(\ell)}[(ac),(bd)] \right|^2, \qquad E_\alpha^{(\ell)} = \mathcal{T}_\alpha^{\ell}.$$

Em resumo

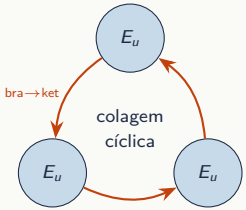
Custo: matrizes $\chi^2 \times \chi^2$, independente do espaço de Hilbert de dimensão 2^ℓ da janela. Multiplicar mais um $\mathcal{T}_\alpha$ dá o próximo ℓ: uma passada por α fornece todos os tamanhos de janela.

$n = 3$: um anel de três produtos de matrizes de transferência

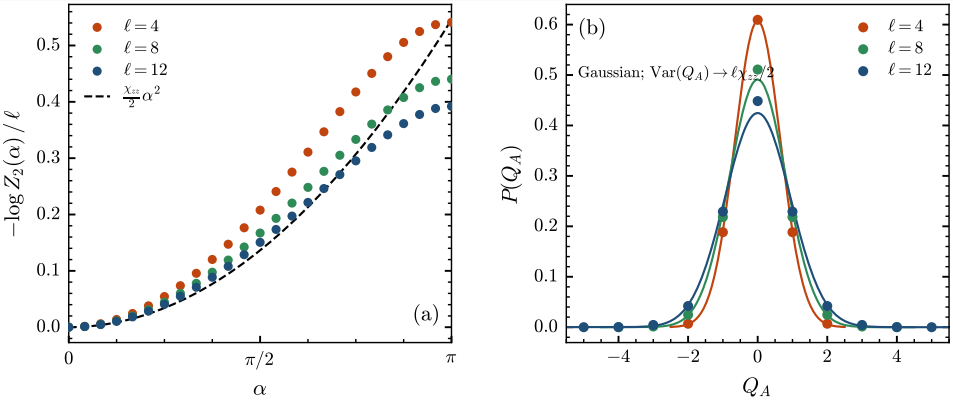
- $\mathrm{Tr}[\rho_A e^{iu_1 Q} \rho_A e^{iu_2 Q} \rho_A e^{iu_3 Q}]$, $u_3 = -u_1 - u_2$.
- Cada ρ_A contribui com um peso λ^2 no seu índice esquerdo; cada fase $e^{iu_r Q}$ fica numa camada. As três cópias são coladas *ciclicamente*: bra da cópia r com ket da cópia $r+1$.
- Com $X = E^{(\ell)}_{u_3}$, $Y = E^{(\ell)}_{u_1}$, $Z = E^{(\ell)}_{u_2}$:

$$W_3 = \sum_{abcdef} w_a w_c w_e \, X_{(bf),(ae)} \, Y_{(db),(ca)} \, Z_{(fd),(ec)}.$$

- Média sobre uma grade $N \times N$ de (u_1, u_2); $\Delta S^{(3)} = -\frac{1}{2} \log \overline{W_3 / W_3(0)}$.



Estatística de carga gaussiana, vista diretamente



(a) $-\log Z_2(\alpha)/\ell$ para $\ell = 4, 8, 12$ colapsa na parábola $(\chi_{zz}/2)\alpha^2$. (b) $P(Q_A)$ se alarga com ℓ; as curvas são gaussianas com a variância medida, que se aproxima de $\ell\chi_{zz}/2$. Ponto $(\Delta_z, \gamma) = (0.3, 0.2)$.

Teste 1: a constante prevista em $n = 2$

Fórmula mestra em $n = 2$:

$$\Delta S_A^{(2)}(\ell) = \frac{1}{2}\log \ell + c_1 + \mathcal{O}\big((M\ell)^{-1}\big),$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\log(2\pi\chi_{zz}).$$

Procedimento

1. Calcule $\Delta S_A^{(2)}$ para $\ell = 16, 24, \ldots, 56$ por matrizes de transferência.
2. Forme $c_1(\ell) = \Delta S_A^{(2)} - \frac{1}{2}\log \ell$: p. ex. $\ell = 16$: $1.24159 - 1.38629 = -0.14470$.
3. Ajuste $c_1(\ell) = a + b/\ell$ em várias janelas; a é a constante extrapolada.
4. Inverta: $\chi_{zz}^{\mathrm{asym}} = e^{2c_1}/2\pi$.

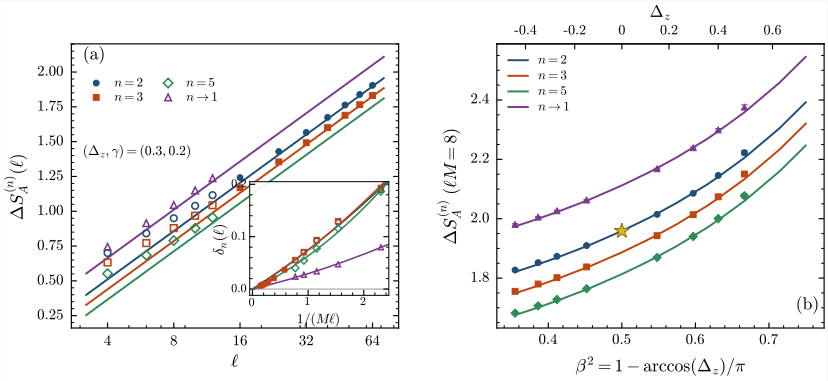
(Δ_z, γ)	$(0.3, 0.2)$	$(-0.3, 0.2)$
c_1 (ajuste)	-0.18343	0.21111
c_1 previsto	-0.18243	0.21332
$\chi_{zz}^{\mathrm{asym}} = e^{2c_1}/2\pi$	0.1103	0.2428
χ_{zz} (direto)	0.1105	0.2438

Resultado principal

A assimetria de emaranhamento e uma soma de correlações comum concordam em 0.2–0.4%, dos dois lados do ponto de férmions livres, sem parâmetro livre.

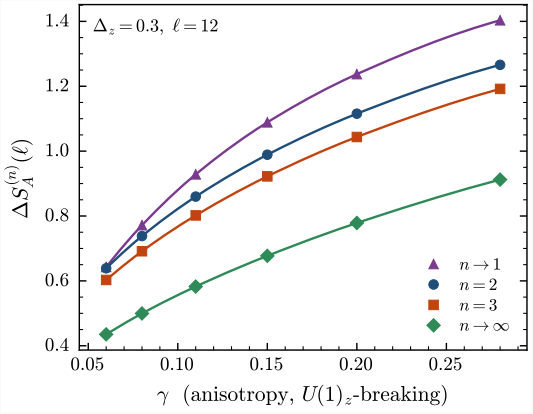
A deriva residual entre janelas de ajuste reflete a cauda $\mathcal{O}((M\ell)^{-1})$ nos $M\ell$ acessíveis.

A própria assimetria, variando o índice de réplica e o acoplamento



(a) $\Delta S_A^{(n)}(\ell)$ em $(0.3, 0.2)$ para $n = 2, 3, 5$ e von Neumann: símbolos vazados de matrizes densidade por força bruta ($\ell \leq 12$), cheios de matrizes de transferência; linhas: fórmula mestra. Detalhe: o desvio versus $1/(M\ell)$ extrapola a zero. (b) Com $\ell M = 8$ fixo versus β^2: linhas da amplitude de dois kinks+B_1; símbolos do $\mathfrak{c}$ do iDMRG.

Ligando a quebra



- Janela fixa $\ell = 12$, $\Delta_z = 0.3$, variando γ.
- $\gamma \to 0$: de volta à cadeia XXZ simétrica, $\Delta S_A^{(n)} \to 0$.
- A assimetria cresce monotonicamente com γ, ordenada pelo índice de Rényi ($n \to 1, 2, 3, \infty$).
- Quando $\ell \gg 1/M$, os valores se aproximam da fórmula mestra; em γ pequeno a janela fixa é mais curta que o comprimento de correlação: o cruzamento $\mathcal{O}((M\ell)^{-1})$.

Em resumo

A contrapartida de equilíbrio do "ferromagneto inclinado" de Ares–Murciano–Calabrese, com a anisotropia γ no papel do ângulo de inclinação.

Apêndice F — Perspectivas e glossário

O que é geral, o que é específico, o que está em aberto

Geral

Fórmula mestra: toda cadeia 1D com gap e carga $U(1)$ quebrada explicitamente, com χ sua susceptibilidade. Regra de soma + corredor de Cauchy–Schwarz: toda teoria com gap e $\dot{Q}$ local.

Específico

Formas fechadas dos momentos (carga bosonizada, EDM de sine-Gordon); fatores de forma de dois kinks e de B_1; massa da rede pela integrabilidade da XYZ.

Em aberto

- Ressomar a cauda de quatro kinks.
- Regra de soma f repulsiva $\xi_{\mathrm{sG}} > 1$.
- O regime Néel, $\Delta_z > 1$.
- Campos; quenches.

Um tema recorrente: o ponto de férmions livres

Em $\beta^2 = \frac{1}{2}$ o operador de quebra satura uma cota tipo Seiberg: a integral do valor de vácuo diverge para $\xi_{\mathrm{sG}} \geq 1$, a regra de soma f diverge, a margem de crescimento do fator de forma fecha, e a fonte vira uma massa de Dirac livre que desliga os canais de ≥ 3 partículas.

◂ Voltar ao slide 40 ▸ Conteúdo

Qual a conexão com informação e computação quânticas?

Um computador quântico é um sistema quântico de muitos corpos controlável.

- **Spins são qubits.** Uma cadeia de N spins-$\frac{1}{2}$ e um registrador de N qubits têm o mesmo espaço de Hilbert, de dimensão 2^N: basta ler $|\uparrow\rangle = |0\rangle$ e $|\downarrow\rangle = |1\rangle$.
- **Interações são portas lógicas.** Ligar a interação entre dois spins vizinhos por um tempo t gera uma porta de dois qubits: Ising $\rightarrow$ CZ, XY $\rightarrow$ iSWAP, Heisenberg $\rightarrow$ SWAP. É assim que o hardware cria emaranhamento.
- **Computadores são simuladores.** A evolução e^{-iHt} de uma cadeia pode ser quebrada em portas (simulação digital) ou imitada diretamente por íons e átomos frios (simulação analógica).
- **Emaranhamento mede o custo clássico.** Estados com lei de área, como o estado fundamental com gap, são baratos no computador clássico (MPS, DMRG). Uma dinâmica genérica gera emaranhamento demais: aí o computador quântico pode ajudar.
- **Estados de muitos corpos são recursos.** Com estados *cluster* se computa só medindo; a ordem topológica (código de superfície) protege a informação contra erros locais.
- **Modelos solúveis testam o hardware.** XXZ e XYZ têm resultados analíticos exatos, que servem de gabarito para verificar se a máquina está correta.

Glossário (1/2)

- **Gap**: energia da excitação mais barata acima do estado fundamental num sistema infinito.
- **Com gap**: gap > 0; correlações decaem exponencialmente, com comprimento de correlação ξ.
- **Crítico**: sem gap; correlações decaem como leis de potência.
- **Simetria**: unitária U com $[H, U] = 0$; as contínuas têm um gerador (carga) Q.
- **Quebra explícita**: um termo de H viola a simetria (γ aqui).
- **Quebra espontânea**: H é simétrico mas o estado não (vácuos Néel-x).
- **Vácuo**: um dos estados fundamentais degenerados que satisfazem cluster.
- **Kink**: parede de domínio entre dois vácuos; partícula de massa M; topológico.
- **Breather**: estado ligado kink–antikink ($\Delta_z < 0$).
- ρ_A: matriz densidade reduzida da janela A (traço parcial).
- **Entropia de Rényi**: $\frac{1}{1-n} \log \mathrm{Tr} \rho^n$.
- **Assimetria**: entropia ganha ao apagar as coerências entre setores de carga.
- **Momento carregado**: Z_n: traço de ρ_A's intercalados com rotações.
- **Réplica**: uma das n cópias de ρ_A em $\mathrm{Tr} \rho^n$.
- χ_{zz}: $\frac{1}{2} \sum_r \langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_c$; $\mathrm{Var}(Q_A) \simeq \ell \chi_{zz}/2$.
- **Limite de escala**: $\gamma \to 0$ com $M\ell$ fixo; descrito por uma teoria de campos.

◂ Voltar ao slide 40 ▸ Conteúdo

Glossário (2/2)

- **Sine-Gordon**: $\frac{1}{16\pi}(\partial\phi)^2 - 2\mu\cos\beta\phi$; o limite do contínuo aqui.
- β^2, ξ_{sG}: $1 - \arccos(\Delta_z)/\pi$; $\beta^2/(1-\beta^2)$.
- **Rapidez**: $E = M\cosh\theta$, $p = M\sinh\theta$.
- **Integrável**: infinitas leis de conservação; espalhamento elástico fatorizado.
- **Fator de forma**: elemento de matriz $\langle 0|\mathcal{O}|\theta_1\cdots\theta_k\rangle$.
- **Regra de soma**: identidade que escreve uma quantidade estática como soma sobre estados excitados.
- **Fator CDD**: solução trivial das equações de fator de forma; excluída aqui.
- **Valores de Schmidt**: valores singulares do estado através de um corte.
- **MPS**: produto de matrizes por sítio; dimensão de ligação χ.
- **Injetivo**: MPS cuja matriz de transferência tem autovalor dominante único.
- **Matriz de transferência**: $\sum_s B^s \otimes \bar{B}^s$; governa todas as correlações.
- **MPO**: o hamiltoniano como produto de matrizes de operadores.
- **DMRG**: otimização variacional de um MPS, dois sítios de cada vez.
- **iDMRG**: DMRG que faz crescer um MPS infinito, invariante por translação.
- **Umklapp**: operador de rede ausente em sine-Gordon; correção γ^s.

Glossário (3/3): o vocabulário das Partes 1–3

- **Qubit**: sistema quântico de dois níveis; aqui um spin-$\frac{1}{2}$.
- **Superposição**: $a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$; resultados aleatórios com probabilidades $|a|^2$, $|b|^2$.
- **Estado produto**: cada parte tem seu próprio estado; $S_A = 0$.
- **Emaranhado**: não é estado produto; as partes não têm vetor de estado próprio.
- **Par de Bell**: par de qubits maximamente emaranhado; $S_A = \log 2$ (um ebit).
- **Matriz densidade**: ρ: descreve estados mistos; $\mathrm{Tr}\rho = 1$.
- **Decomposição de Schmidt**: $\sum_a \lambda_a |u_a\rangle|v_a\rangle$; $\lambda_a^2 =$ autovalores de ρ_A.
- **Lei de área**: S_A limitado quando ℓ cresce (estados fundamentais com gap).
- **Carga central**: o c em $\frac{c}{3}\log \ell$ num ponto crítico.
- **Troca**: interação que alinha (ferro) ou anti-alinha (antiferro) spins vizinhos.
- **Anisotropia**: acoplamentos diferentes em eixos diferentes (γ, Δ_z).
- **Quasipartícula**: excitação coletiva que se comporta como partícula de energia $\varepsilon(p)$.
- **Comprimento de correlação**: ξ: distância em que as correlações sobrevivem; $\xi \sim v/\Delta$.
- **Ordem de Néel**: padrão antiferromagnético $\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow$; parâmetro de ordem: magnetização alternada.
- **Parâmetro de ordem**: quantidade nula na fase simétrica e não nula na quebrada.
- **Topológico**: não pode ser removido por nenhuma mudança local (kinks).
- **Twirl**: média sobre todas as operações de simetria; apaga as coerências entre setores.

◂ Voltar ao slide 40 ▸ Conteúdo