Assimetria de emaranhamento na cadeia XYZ de spin-$\frac{1}{2}$ com gap

Felipe Taha Sant'Ana

Centro de Matemática, Computação e Cognição — Universidade Federal do ABC

O título, parte por parte

Parte 2
assimetria de emaranhamento

Assimetria de **emaranhamento** na **cadeia XYZ de spin-$\frac{1}{2}$** **com gap**

Parte 1
entropia de emaranhamento: Shannon, von Neumann, Rényi

Parte 3
a cadeia de spins XYZ: spins, hamiltonianos, com gap vs sem gap, ordem de Néel, kinks, breathers

Parte 4 — juntando tudo: quanto de uma simetria quebrada é visível dentro de uma janela da cadeia

▸ A pergunta em uma frase: A2

Parte 1 — Entropia de emaranhamento: de Shannon a Rényi

Quanto não sabemos? A entropia de Shannon

Entropia de Shannon das probabilidades $p_1, \ldots, p_N$

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i.$$

Conceitos centrais

- Surpresa e probabilidade: eventos raros trazem mais surpresa (mais informação) quando acontecem; eventos previsíveis ou garantidos não trazem nenhuma.
- Entropia máxima: atingida quando todos os resultados são igualmente prováveis (máxima aleatoriedade ou incerteza).
- Entropia mínima: $H = 0$ para um resultado determinístico (conhecido com certeza).

- Resultado certo ($p_1 = 1$): $H = 0$.
- Moeda honesta: $H = \log 2$ (um *bit*).
- Dado honesto: $H = \log 6$. Em geral, N resultados igualmente prováveis: $H = \log N$.
- Moeda viciada p: $H = -p \log p - (1-p) \log(1-p)$.

Em resumo

H conta, em escala logarítmica, quantas possibilidades igualmente prováveis você efetivamente tem: e^H "resultados efetivos". $H/\log 2$ é o número de bits necessários, em média, para registrar o resultado.

▸ Teorema de Shannon, sequências típicas: A3–A4

Shannon encontra um qubit

Jogo das vinte perguntas com um spin

Quão incerto é um spin? Meça-o e calcule o H de Shannon dos resultados.

	medir em z	medir em x
spin em x ($\rightarrow$)	50/50: **1 bit**	sempre $\rightarrow$: **0 bit**
moeda 50/50 ($\uparrow$ ou $\downarrow$)	50/50: **1 bit**	50/50: **1 bit**

Algo novo

Para um dado, H é uma propriedade do dado. Para um spin, H depende da *pergunta*: o spin $\rightarrow$ é perfeitamente previsível ao longo de x; a moeda nunca é. A entropia quântica deve ser a aleatoriedade que sobra após a melhor pergunta.

O que precisamos a seguir

Uma descrição do estado que responde a *todas* as perguntas de uma vez: a matriz densidade ρ. Sua entropia, a entropia de von Neumann, é o H da melhor pergunta.

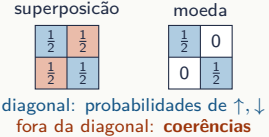
Uma regra clássica que falha

Classicamente, o todo nunca é menos incerto que as partes: $H(AB) \geq H(A)$. Dois spins num singleto: cada um sozinho é uma moeda perfeita, $S_A = \log 2$, mas o par é totalmente conhecido, $S_{AB} = 0$. Essa diferença é o emaranhamento.

Estados mistos e sua entropia

Estado misto: uma moeda sobre estados puros

"↑ ou ↓, 50/50, não sabemos qual" é ignorância clássica sobre a mecânica quântica. A matriz densidade ρ registra ambas.



Mesma diagonal, coerências diferentes

Superposição = estado definido; moeda = ignorância.

Entropia: o que a melhor pergunta deixa

Todo estado tem uma *melhor pergunta* (sua autobase). A entropia de von Neumann é o H de Shannon das respostas, $S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i = -\mathrm{Tr}\rho \log \rho$, com λ_i os autovalores de ρ: são probabilidades.



- Puro: $S = 0$, totalmente conhecido. Chances iguais entre d opções, $\rho = \mathbb{1}/d$: $S = \log d$, o máximo ($d = 2^\ell$ para ℓ spins), em qualquer base.

▸ Qubits, medição, dois spins: A5–A9 ▸ Por que a autobase: A10

O par de Bell: correlações perfeitas sem valores definidos

Tome o singleto $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$.

- Meça A ao longo de z: $\uparrow$ ou $\downarrow$ com probabilidade $\frac{1}{2}$ cada — totalmente aleatório.
- Então B ao longo de z é *sempre* o oposto.
- O mesmo vale em x, em y, em qualquer eixo: o singleto é invariante por rotações, $\vec{S}_A + \vec{S}_B = 0$.

Resultado principal

Cada spin sozinho: maximamente aleatório. O par: perfeitamente correlacionado em toda direção. Variáveis aleatórias clássicas não fazem isso em todas as direções ao mesmo tempo (teorema de Bell).



resultados sempre opostos, cada um 50/50

Analogia

Duas luvas em duas caixas: abra uma e você sabe a outra. *Mas* as luvas já são esquerda/direita antes; o singleto não tem valor prévio em eixo nenhum e, mesmo assim, é correlacionado em todos.

Entropia de emaranhamento: quão mista é uma parte?

O que A sozinho vê

Esqueça B: sobra o estado reduzido $\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho$. Para o singleto, $\rho_A = \mathbb{1}/2$, a moeda do slide 4. O par é puro, $S(\rho) = 0$; a parte é mista, $S_A = S(\rho_A) = \log 2$.

Entropia de emaranhamento

Se o todo é puro, a parte é mista só pelo vínculo com o resto, e S_A mede esse vínculo.



Aqui: A é uma janela de ℓ spins; o todo é o estado fundamental da cadeia.

Outra medida de mistura: duas cópias

$S(\rho_A)$ pede o logaritmo de uma matriz $2^\ell \times 2^\ell$. Mais direto: prepare o estado duas vezes e faça a melhor pergunta a cada cópia. A chance de respostas iguais é $\sum_i \lambda_i^2 = \mathrm{Tr}\rho^2$.

Puro: 1. Chances iguais entre d opções: $1/d$. Então $-\log \mathrm{Tr}\rho^2$ vale 0 e $\log d$, como S nesses extremos.

Com n cópias

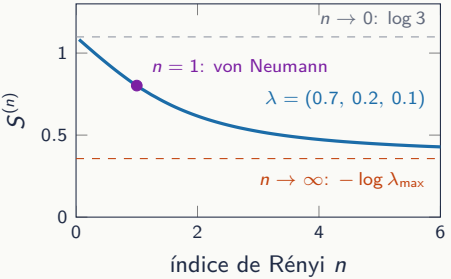
A chance de n respostas iguais é $\mathrm{Tr}\rho^n = \sum_i \lambda_i^n$: um número para cada n, só com produtos de matrizes. Em forma de entropia, são as entropias de Rényi.

▸ Matrizes reduzidas, Schmidt: A11–A15 ▸ Cadeias, leis de área e logarítmica: A16–A17

Entropias de Rényi: uma família indexada por n

Entropia de Rényi de ordem $n > 0$, $n \neq 1$

$$S^{(n)}(\rho) = \frac{1}{1-n} \log \mathrm{Tr}\rho^n = \frac{1}{1-n} \log \sum_i \lambda_i^n.$$



Valores especiais (qualquer estado ρ)

$n \to 0$:	log(número de $\lambda_i > 0$)
$n = 1$:	von Neumann S
$n = 2$:	$-\log \mathrm{Tr}\rho^2$ (pureza) [a]
$n \to \infty$:	$-\log \lambda_{\max}$ [b]

Em resumo

n é um zoom: n pequeno conta os autovalores democraticamente; n grande só olha para o maior.

[a] Pureza $\mathrm{Tr}\rho^2$: $= 1$ só para estados puros, $= 1/d$ para $\mathbb{1}/d$.

[b] $\lambda_{\max}$: o maior autovalor de ρ, para qualquer estado ($= 1$ se puro, $= 1/d$ para $\mathbb{1}/d$).

Parte 2 — Assimetria de emaranhamento

O que é uma simetria?

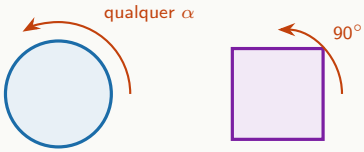
No dia a dia

Um prato redondo parece o mesmo após qualquer rotação em torno do centro: tem simetria de rotação *contínua*. Um quadrado só parece o mesmo após rotações de 90°: uma simetria *discreta*. Uma batata não tem nenhuma.

Mecânica quântica

Uma simetria é uma operação unitária U que deixa o hamiltoniano inalterado:

$$UHU^\dagger = H \quad \Longleftrightarrow \quad [H, U] = 0.$$



Em resumo

As simetrias importam porque cada simetria contínua vem com uma quantidade conservada (teorema de Noether).

Rotações de spins e a carga conservada

Gire cada spin por um ângulo α em torno do eixo z:

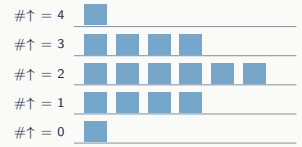
$$U(\alpha) = e^{i\alpha Q}, \qquad Q = \frac{1}{2}\sum_j \sigma_j^z = \#\uparrow - \frac{N}{2}.$$

Q é a carga que gera a rotação (aqui: a magnetização total ao longo de z).

- Q simplesmente *conta* spins para cima.
- Se $[H, Q] = 0$, o número de spins para cima nunca muda na evolução: Q é conservada.

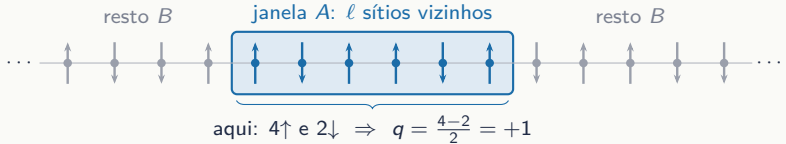
Estante

Organize as 2^N configurações dos spins em prateleiras rotuladas por Q (quantos estão para cima). Um hamiltoniano simétrico nunca move um livro de uma prateleira para outra.



$N = 4$: cada quadrado é uma configuração ($2^4 = 16$ no total); linha = número de spins para cima, i.e. um valor de Q; tamanhos $\binom{4}{\#\uparrow} = 1, 4, 6, 4, 1$.

A carga dentro da janela e os projetores Π_q



Carga da janela

$$Q_A = \frac{1}{2}\sum_{j\in A}\sigma_j^z = \frac{\#\uparrow - \#\downarrow}{2}$$

Só conta os spins *dentro* de A. Valores possíveis: $q = -\frac{\ell}{2}, \ldots, \frac{\ell}{2}$, inteiros para ℓ par. Cada valor de q define um setor de carga.

Medida: $P(Q_A = q) = \mathrm{Tr}(\Pi_q \rho_A)$ é a probabilidade de encontrar carga q na janela.

O projetor Π_q: um filtro de carga

Definição: $\Pi_q = \sum_{s:\, Q_A(s)=q} |s\rangle\langle s|$, soma sobre as configurações s de A com carga q.

O que faz: mantém as componentes com $Q_A = q$ e apaga as outras. Para $\ell = 2$:

$$\Pi_0\big(a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\uparrow\downarrow\rangle + c|\downarrow\uparrow\rangle + d|\downarrow\downarrow\rangle\big) = b|\uparrow\downarrow\rangle + c|\downarrow\uparrow\rangle.$$

Propriedades: $\Pi_q\Pi_{q'} = \delta_{qq'}\Pi_q$, $\sum_q \Pi_q = \mathbb{1}_A$, $Q_A = \sum_q q\,\Pi_q$.

Coerências: a assinatura de uma simetria quebrada

Escreva a matriz densidade da janela na base ordenada por carga. Suas entradas são de dois tipos:

- **dentro de um setor** ($q = q'$): populações e coerências entre estados com o mesmo número de spins para cima;
- **entre setores** ($q \neq q'$): coerências entre cargas diferentes.

Resultado principal

ρ_A é simétrica, $[\rho_A, Q_A] = 0$, se e somente se todas as entradas entre setores se anulam: ρ_A é bloco-diagonal.

Um spin apontando ao longo de x

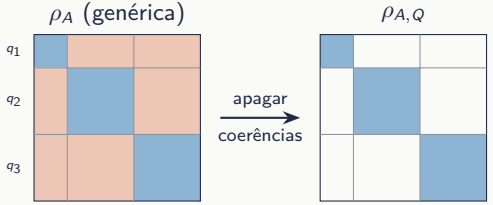
$$|{\rightarrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{\uparrow}\rangle + |{\downarrow}\rangle), \qquad \rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Os $\frac{1}{2}$ fora da diagonal ligam $q = +\frac{1}{2}$ e $q = -\frac{1}{2}$: são eles que fazem o spin apontar ao longo de x, em vez de "para cima ou para baixo ao acaso".

Em resumo

As coerências entre setores de carga *são* a simetria quebrada. Apague-as e a simetria volta.

Estados simétricos e assimétricos



Girando a fotografia

Tire uma foto de uma seta e sobreponha cópias giradas por todos os ângulos: obtém-se um disco sem traços. A média sobre todas as orientações apaga a direção e guarda só o que é invariante por rotação.

Estado simetrizado

$$\rho_{A,Q} = \sum_q \Pi_q \, \rho_A \, \Pi_q = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \, e^{-i\alpha Q_A} \rho_A \, e^{i\alpha Q_A}.$$

- Blocos azuis (mesmo setor) são mantidos; blocos laranja (coerências entre cargas diferentes) são zerados.
- $[\rho_{A,Q}, Q_A] = 0$: simétrica por construção.
- Mesma estatística de carga: $\mathrm{Tr}(\Pi_q \rho_{A,Q}) = \mathrm{Tr}(\Pi_q \rho_A)$, por $\Pi_q^2 = \Pi_q$ e ciclicidade.
- $\rho_{A,Q}$ é a melhor aproximação simétrica de ρ_A: mesma estatística de carga, nenhuma coerência entre cargas.

Definição da assimetria de emaranhamento

Assimetria de emaranhamento de Rényi [Ares, Murciano, Calabrese 2023]

$$\Delta S_A^{(n)} = S^{(n)}(\rho_{A,Q}) - S^{(n)}(\rho_A) = \frac{1}{1-n} \log \frac{\mathrm{Tr}\rho_{A,Q}^n}{\mathrm{Tr}\rho_A^n}.$$

Duas propriedades:

1. $\Delta S_A^{(n)} \geq 0$ para todo n;
2. $\Delta S_A^{(n)} = 0$ se e somente se $[\rho_A, Q_A] = 0$.

Logo, é uma *medida da quebra de simetria dentro de A*.

Em resumo

Apagar coerências deixa o estado mais "espalhado". Se o estado não tinha coerências entre setores de carga, nada muda e a assimetria é zero. Quanto mais coerência, maior o ganho de entropia.

▸ Positividade: A18–A20

Exemplo: um único spin

Spin inclinado por um ângulo ϑ de z em direção a x:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\vartheta}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\vartheta}{2}|\downarrow\rangle.$$

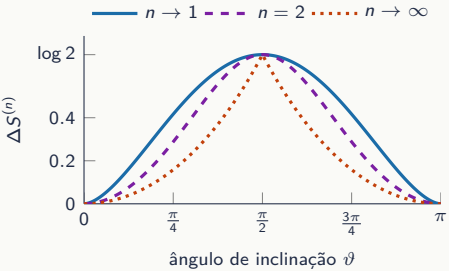
$Q = \frac{1}{2}\sigma^z$ tem setores $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$. Apagando as entradas fora da diagonal de $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$:

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} \\ \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} & \sin^2\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix},$$

$$\rho_Q = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\vartheta}{2} & 0 \\ 0 & \sin^2\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}.$$

O estado é puro, $S^{(n)}(\rho) = 0$: a assimetria é a entropia de Rényi das duas probabilidades que restam na diagonal,

$$\Delta S^{(n)} = \frac{1}{1-n}\log\left[\cos^{2n}\frac{\vartheta}{2} + \sin^{2n}\frac{\vartheta}{2}\right].$$



Em resumo

Ao longo de $\pm z$ ($\vartheta = 0, \pi$): simétrico, $\Delta S = 0$. Ao longo de x ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$): $\Delta S = \log 2$ para todo n. Um único spin tem só dois setores de carga e nunca guarda mais que $\log 2$ de assimetria: para encontrar mais, precisamos de muitos spins.

Resumo da Parte 2

O que lembrar

- Uma carga conservada Q organiza os estados em setores; uma ρ_A simétrica é bloco-diagonal.
- As coerências entre setores são a simetria quebrada.
- $\rho_{A,Q}$: apague-as (média sobre todas as rotações).
- $\Delta S_A^{(n)} = S^{(n)}(\rho_{A,Q}) - S^{(n)}(\rho_A) \geq 0$, zero sse simétrica.
- Distribuição de carga gaussiana larga $\Rightarrow \Delta S \simeq \frac{1}{2} \log \mathrm{Var}(Q_A) \sim \frac{1}{2} \log \ell$.

Ponte para a Parte 3

Para calcular ΔS_A num sistema de muitos corpos real, precisamos de uma cadeia cuja simetria esteja *quase* presente, de um estado fundamental e de um modo de calcular $\mathrm{Var}(Q_A)$. A Parte 3 apresenta essa cadeia: o modelo XYZ, seu gap, sua ordem de Néel, seus kinks e breathers.

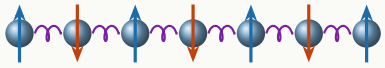
Parte 3 — A cadeia XYZ de spin-$\frac{1}{2}$ com gap

O que é uma cadeia de spins, e por que estudá-la?

- Em muitos cristais, íons magnéticos interagem fortemente numa direção e fracamente nas outras: ímãs unidimensionais (p. ex. $KCuF_3$, Cs_2CoCl_4, $SrCuO_2$).
- Cada íon tem spin-$\frac{1}{2}$: o bit quântico da Parte 1.
- Cadeias também são *construídas* átomo por átomo: íons aprisionados, átomos de Rydberg, qubits.

A razão do teórico

Em 1D, problemas fortemente interagentes muitas vezes têm solução *exata*: cadeias de spins são o átomo de hidrogênio da física de muitos corpos.



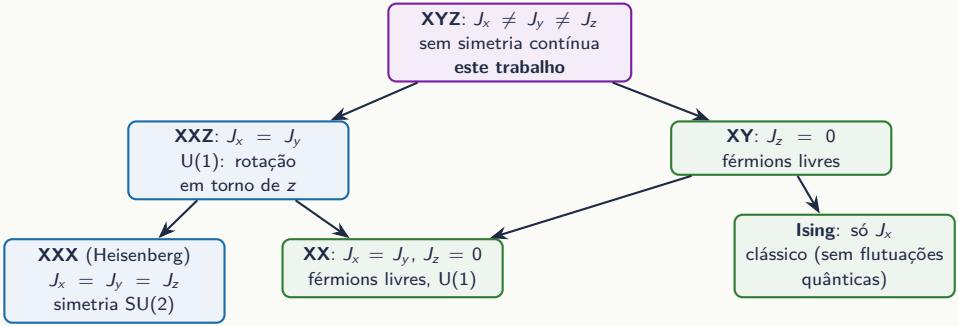
spins numa linha, acoplados aos vizinhos

Atenção

"Spin-$\frac{1}{2}$": dois estados por sítio, $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$. "Cadeia": sítios numa linha, acoplados só aos primeiros vizinhos.

▸ Hamiltoniano, troca: A21–A22

A família de cadeias de spins



Em resumo

Cada seta iguala ou zera acoplamentos e ganha simetria ou simplicidade. A cadeia XYZ está no topo: a cadeia de spin-$\frac{1}{2}$ de primeiros vizinhos mais geral, com eixos alinhados aos acoplamentos, e ainda exatamente solúvel (Baxter 1971).

O modelo: a cadeia de spins XYZ

$$H = \sum_j \Big[\underbrace{(1+\gamma)\,\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + (1-\gamma)\,\sigma_j^y \sigma_{j+1}^y}_{\text{hopping} + \gamma\times\text{criação de pares}} + \underbrace{\Delta_z\,\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z}_{\text{interação}} \Big], \qquad |\Delta_z| < 1, \quad 0 < \gamma \ll 1$$

Com $\sigma^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$, os dois primeiros termos são

$$2\big(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \text{h.c.}\big) + 2\gamma\big(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ + \text{h.c.}\big).$$

- Coeficiente positivo favorece o *anti*-alinhamento; o maior é $1+\gamma$: vizinhos preferem apontar em sentidos opostos em x.
- $\gamma =$ anisotropia x/y: o termo que quebra a simetria de rotação em torno de z.
- Δ_z: spins invertidos vizinhos se repelem ($\Delta_z > 0$) ou se atraem ($\Delta_z < 0$).

parâmetros	nome
$\gamma = 0,\ \Delta_z = 1$	Heisenberg (isotrópico)
$\gamma = 0,\ \lvert\Delta_z\rvert < 1$	XXZ: referência simétrica
$\gamma > 0,\ \Delta_z = 0$	XY (férmions livres)
$\gamma > 0,\ \Delta_z \neq 0$	**XYZ (este trabalho)**

Por que este modelo

Interagente para $\Delta_z \neq 0$ e, mesmo assim, exatamente solúvel na rede. γ pequeno: simetria pouco quebrada, gap pequeno, comprimento de correlação longo.

▸ Termos, simetria e γ: A23–A25

O espectro de energia de uma cadeia

- O hamiltoniano tem uma lista de energias permitidas $E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \ldots$
- E_0: o estado fundamental — o estado da cadeia a temperatura zero.
- Os demais são excitações. Em baixa energia, em geral parecem *partículas* que viajam pela cadeia com momento p e energia $\varepsilon(p)$: quasipartículas.

Gap de energia

$$\Delta_{\text{gap}} = \lim_{N\to\infty} (E_1 - E_0),$$

ignorando estados fundamentais degenerados.

Quasipartículas

Uma "ola" num estádio lotado percorre as arquibancadas sem que ninguém saia do lugar. As excitações de uma cadeia de spins são assim: perturbações coletivas que se movem e carregam energia como partículas.

Em resumo

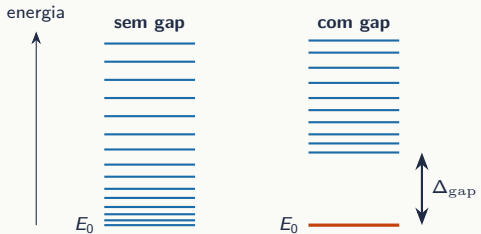
Duas possibilidades quando a cadeia fica infinita: o gap continua finito (com gap) ou vai a zero (sem gap). Essa única distinção controla quase todo o resto.

O que significa “com gap”

- **Com gap**: $\Delta_{\mathrm{gap}} > 0$. Excitar a cadeia custa pelo menos uma quantidade finita de energia, por mais longa que seja a cadeia.
- **Sem gap**: existem excitações de energia arbitrariamente baixa; os níveis se fundem num contínuo que começa em E_0.

Por que importa

Em qual dos dois casos estamos decide até onde vão as correlações (próximos slides), quão emaranhada é uma janela (lei de área) e se a assimetria pode ser calculada (Parte 4).



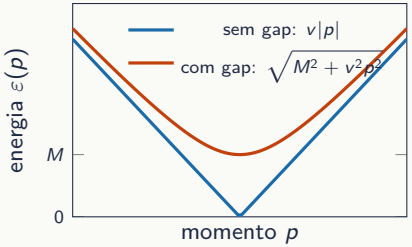
Quasipartículas: sem massa versus com massa

Relação de dispersão $\varepsilon(p)$

- **Sem gap**: $\varepsilon = v|p|$, como a luz ou o som.
- **Com gap**: $\varepsilon = \sqrt{M^2 + v^2 p^2}$, a relação de Einstein para massa M; a velocidade das ondas de spin v faz o papel da "velocidade da luz". Nunca abaixo de M.

Massa versus gap

M: energia de repouso de *uma* quasipartícula ($v = 1$); $1/M$: seu tamanho em sítios. Na cadeia XYZ, a quasipartícula é o kink (M calculada adiante). Kinks nascem em pares: o gap da cadeia é $2M$ (um pouco menos quando dois se ligam).



Em resumo

As mesmas duas formas da relatividade: uma partícula sem massa e uma com massa.

▸ Quasipartículas com e sem massa: A26

O comprimento de correlação

Comprimento de correlação ξ

Num estado fundamental com gap, as correlações conexas decaem como

$$\langle O_i O_j \rangle - \langle O_i \rangle \langle O_j \rangle \sim e^{-|i-j|/\xi}, \qquad \xi \simeq \frac{v}{\Delta_{\text{gap}}}.$$

Por que $\xi \sim v/\Delta$ (incerteza)

Uma excitação virtual de energia $\geq \Delta$ só vive por um tempo $\sim 1/\Delta$; movendo-se com velocidade v, percorre no máximo $\sim v/\Delta$. Além dessa distância, dois spins não conseguem "trocar mensagens".

O que ξ significa

ξ é o tamanho da "vizinhança" que cada spin conhece. Perturbe um spin: o efeito sobre o estado fundamental só é sentido a $\sim \xi$ sítios.

Na cadeia XYZ

$\xi \simeq 1/M$ em unidades da rede. Com γ pequeno, o gap é minúsculo e ξ é longo (dezenas a centenas de sítios): o regime em que uma teoria de campos no contínuo descreve a cadeia.

▸ Exponencial vs lei de potência: A27

Com gap versus sem gap

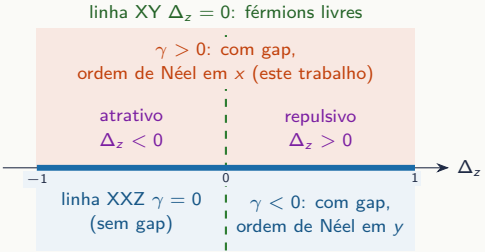
	sem gap	com gap
menor excitação	arbitrariamente barata	custa pelo menos $\Delta = M$
quasipartículas	sem massa, $\varepsilon = v\|p\|$	com massa, $\varepsilon = \sqrt{M^2 + v^2 p^2}$
correlações	lei de potência r^{-2x}	exponencial $e^{-r/\xi}$
compr. de correlação	infinito	$\xi \sim v/M$
invariância de escala	sim (teoria de campos conforme)	não: ξ fixa uma escala
emaranhamento do bloco	$\frac{c}{3} \log \ell$	satura (lei de área)
no computador (MPS)	custo cresce com ℓ	barato: dim. de ligação finita
exemplos	XX, XXZ ($\|\Delta\| \leq 1$), Ising ($h = 1$)	Ising $h \neq 1$, **XYZ**

Em resumo

"Com gap" nos fornece: correlações de curto alcance, flutuações de carga gaussianas, ξ finito — é isso que torna a assimetria calculável.

▸ Exemplos XX e Ising: A28–A29

Onde a cadeia XYZ tem gap



Quão rápido o gap fecha

O expoente $\pi/(2\theta_0)$ varia muito com Δ_z: reduzir γ à metade divide a massa por $2^{\pi/(2\theta_0)}$. No lado repulsivo o gap fecha mais rápido que linearmente, e o comprimento de correlação cresce depressa quando $\gamma \to 0$. Em $\Delta_z = 0$ o expoente é 1: na linha XY, $M = \operatorname{atanh}\gamma \simeq \gamma$.

- Linha $\gamma = 0$, $|\Delta_z| < 1$: a cadeia XXZ. Conserva Q e é **sem gap**; sua física de baixa energia é um "líquido de Luttinger", um bóson livre.
- Qualquer $\gamma > 0$ **abre um gap**. O gap fecha quando $\gamma \to 0$ como uma potência de γ cujo expoente depende de Δ_z:

$$M \propto \gamma^{\pi/(2\theta_0)}, \qquad \theta_0 = \arccos \Delta_z \in (0, \pi).$$

  O prefator também é conhecido: com $\beta^2 = 1 - \theta_0/\pi$, $M \to \left(\gamma 4^{1-2\beta^2} / \sin^2\theta_0\right)^{\pi/(2\theta_0)}$.
- Linha vertical $\Delta_z = 0$: a cadeia XY, de férmions livres. À esquerda, $\Delta_z < 0$, o lado **atrativo**; à direita, $\Delta_z > 0$, o **repulsivo**: o sinal da interação entre spins para cima e, como veremos, entre kinks.

▸ XYZ sem gap?: A30

Quebra explícita e quebra espontânea de simetria

Quebra explícita

As regras (o hamiltoniano) não são simétricas: $[H, U] \neq 0$.



Mesa inclinada: a própria mesa tem uma direção preferida.

Quebra espontânea

As regras são simétricas, $[H, U] = 0$, mas o estado fundamental não: ele escolhe uma de várias opções equivalentes, trocadas por U.



Poço duplo simétrico: a bola fica em um de dois mínimos.

Na cadeia XYZ: as duas, uma após a outra

- γ quebra explicitamente a $U(1)$ contínua de rotação em torno de z: está em H. Resta só a $\mathbb{Z}_2$ (rotação de π).
- O estado fundamental quebra espontaneamente essa $\mathbb{Z}_2$: escolhe um de dois padrões de Néel, trocados pela rotação de π.

O que a assimetria vê

A assimetria mede quanto a janela quebra a $U(1)$. O crescimento $\frac{1}{2}\log \ell$ vem da quebra explícita; num vácuo definido, a $\mathbb{Z}_2$ quebrada espontaneamente contribui com $\log 2$.

Quebra espontânea: dois vácuos de Néel

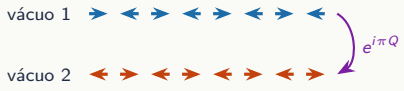
- O acoplamento mais forte é $(1+\gamma)\sigma^x\sigma^x > 0$: vizinhos se anti-alinham ao longo de x. A imagem clássica é o padrão **Néel**-x $\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\cdots$. (em homenagem a Louis Néel (Nobel de 1970)
- A rotação de π em torno de z leva $\sigma^x \to -\sigma^x$; logo, leva $\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\cdots$ em $\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\cdots$. Mesma energia.
- Numa cadeia infinita, o verdadeiro estado fundamental escolhe *um* deles (um "vácuo").

Parâmetro de ordem

A magnetização alternada

$$m_s = \frac{1}{N}\sum_j (-1)^j \langle \sigma_j^x \rangle.$$

$m_s \neq 0$: ordem de Néel. $m_s = 0$: sem ordem.



Dois tipos de quebra

$U(1)$ é quebrada *explicitamente* por γ (em H).
$\mathbb{Z}_2$ é quebrada *espontaneamente* (pelo estado, não por H).

Por que precisa de γ

Em 1D, uma simetria *contínua* não se quebra espontaneamente (Mermin–Wagner, Coleman): a XXZ com $|\Delta_z| < 1$ não tem ordem de Néel. Com $\gamma > 0$ resta só uma $\mathbb{Z}_2$ discreta, que *pode* se quebrar.

▸ Duas quebras de simetria; vácuos: A31–A32

Kinks: paredes entre os dois vácuos



- Um **kink** (parede de domínio) separa uma região do vácuo 1 de uma região do vácuo 2.
- Seu custo de energia está localizado perto da parede; a mecânica quântica deixa a parede se mover, então o kink é uma **partícula** com momento p e energia $E(p)$.
- Para momento baixo, $E(p) = \sqrt{\Delta_{\mathrm{gap}}^2 + v^2 p^2}$ (forma relativística). Chamamos $M \equiv \Delta_{\mathrm{gap}}/v$ de **massa do kink**; em unidades $v = 1$, é ao mesmo tempo uma energia e um *inverso de comprimento*.

Topológico

Um kink não pode ser removido por uma mudança local: longe à esquerda vê-se o vácuo 1, longe à direita, o vácuo 2. Com o mesmo vácuo nas duas pontas, os kinks vêm em **pares** (kink + antikink).

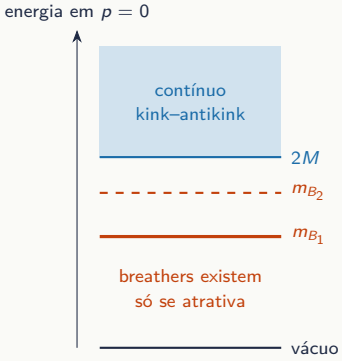
Unidades

Aqui M é o inverso de um comprimento de correlação em unidades da rede: $1/M$ é o "tamanho" de um kink em sítios.

▸ Kinks em detalhe: A33

Pares de kinks, e estados ligados chamados breathers

- Kink e antikink interagem. O sinal da interação é controlado por Δ_z:
  - $\Delta_z < 0$: **atrativa**. Podem se ligar em **breathers** $B_1, B_2, \ldots$, mais leves que $2M$.
  - $\Delta_z > 0$: **repulsiva**. Sem estados ligados; só o contínuo de pares livres a partir de $2M$.
  - $\Delta_z = 0$: sem interação (férmions livres).
- Um breather não tem "parede" líquida: começa e termina no mesmo vácuo, então pode ser criado localmente.



Por que nos importa

A carga quebrada Q flutua porque o estado fundamental cria e destrói sem parar pares virtuais de kinks e breathers. Contá-los (Parte 4, Passo 2) dá χ_{zz}.

▸ Breathers em detalhe: A34–A35

Da cadeia de spins a um campo: o modelo de sine-Gordon



Afastando o zoom

1. **Quando:** $\gamma \ll 1 \Rightarrow \xi \sim 1/M \gg 1$ sítio. A longas distâncias só importam modos lentos, de comprimento de onda longo.
2. $\gamma = \Delta_z = 0$**:** férmions livres. Perto de $\pm k_F$ a dispersão é linear, e pares partícula–buraco são ondas de densidade: um bóson livre ϕ (os dois primeiros termos de $\mathcal{H}$, à direita).
3. $\Delta_z \neq 0$**:** a longas distâncias só muda a rigidez (e a velocidade) do bóson: $\beta^2 = 1 - \arccos(\Delta_z)/\pi$ (pelo ansatz de Bethe).
4. **Limite de escala** ($\gamma \to 0$ com $M\ell$ fixo): a rede sobrevive só em $\beta^2(\Delta_z)$ e $\mu = \gamma\,\mathcal{C}(\Delta_z)$.

Correspondência

$\frac{1}{2}\sigma_j^z \quad \to \frac{2}{\beta}\,\Pi(x) + \ldots$ (densidade de carga)

$\sigma_j^+ \quad \to (-1)^j\, e^{i\beta\phi/2}$ ($(-1)^j$: $2k_F = \pi$)

$\sigma_j^+\sigma_{j+1}^+ \to e^{i\beta\phi}$ (uniforme: $(-1)^j(-1)^{j+1} = -1$)

termo $\gamma \to -2\mu \int \mathrm{d}x \cos\beta\phi, \quad \mu = \gamma\,\mathcal{C}(\Delta_z)$

Resultado: sine-Gordon

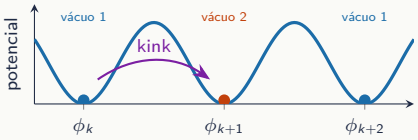
$$\mathcal{H} = \int \mathrm{d}x \left[4\pi\Pi^2 + \frac{1}{16\pi}(\partial_x\phi)^2 - 2\mu\cos\beta\phi \right]$$

$[\phi(x), \Pi(y)] = i\delta(x-y)$. $\cos\beta\phi$ tem dimensão $2\beta^2 < 2$: *relevante*, gap para todo $\gamma > 0$, $M \propto \mu^{1/(2-2\beta^2)} \propto \gamma^{\pi/2\theta_0}$.

▸ Limite do contínuo, bosonização, kink: A36–A38

Rede $\leftrightarrow$ sine-Gordon, e as partículas

cadeia XYZ	sine-Gordon
rotação $e^{i\alpha Q}$ em torno de z	translação $\phi \to \phi + 2\alpha/\beta$
$\gamma = 0$: todo α, $U(1)$	$\mu = 0$: toda translação
$\gamma > 0$: só $\alpha = \pi$, $\mathbb{Z}_2$	$\mu > 0$: só translações de $2\pi/\beta$
dois vácuos Néel-x	mínimos vizinhos ϕ_k, ϕ_{k+1}
kink (parede de domínio)	sóliton de ϕ_k a ϕ_{k+1}
energia de um kink/v	massa do kink M



O acoplamento renormalizado

$$\xi_{\mathrm{sG}} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{\pi}{\theta_0} - 1.$$

$\xi_{\mathrm{sG}} < 1$	atrativo ($\Delta_z < 0$), breathers
$\xi_{\mathrm{sG}} = 1$	férmions livres ($\Delta_z = 0$)
$\xi_{\mathrm{sG}} > 1$	repulsivo ($\Delta_z > 0$)

Espectro quântico

Kink e antikink de massa M; para $\xi_{\mathrm{sG}} < 1$, breathers

$$m_{B_n} = 2M \sin \frac{n\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2}, \quad n < 1/\xi_{\mathrm{sG}}.$$

Exatamente solúvel: o que a “integrabilidade” nos dá

- **Na rede**: Baxter (1971–72) mostrou que o hamiltoniano XYZ comuta com a matriz de transferência de um modelo clássico 2D (o modelo de oito vértices) e o resolveu. Johnson, Krinsky e McCoy (1973) extraíram o espectro de excitações: a massa do kink M numa fórmula fechada em funções elípticas.
- **No contínuo**: sine-Gordon também é integrável. Zamolodchikov & Zamolodchikov (1979): espalhamento de kinks e breathers. Lukyanov (1997): fatores de forma em forma fechada — como um operador local cria kinks e breathers a partir do vácuo.

Por que isso importa aqui

A assimetria depende de $\chi_{zz} = M\,\mathfrak{c}(\beta^2)$. A integrabilidade dá M na rede e dá as peças de $\mathfrak{c}$ no contínuo.

Atenção

A integrabilidade não entrega a assimetria diretamente; o trabalho é reduzi-la a quantidades que ela fornece.

Resumo da Parte 3

O que lembrar

- XYZ: três acoplamentos diferentes em x, y, z; γ quebra explicitamente a rotação em torno de z; Δ_z é a interação.
- Com gap para $\gamma > 0$: quasipartículas com massa, correlações exponenciais, $\xi \sim 1/M$.
- Estado fundamental: um de dois vácuos Néel-x (quebra espontânea de $\mathbb{Z}_2$).
- Excitações: kinks (paredes entre vácuos) e, se $\Delta_z < 0$, breathers (kinks ligados).
- A longas distâncias: a teoria de campos de sine-Gordon, exatamente solúvel.

Ponte para a Parte 4

Agora temos todas as peças do título:

- **assimetria de emaranhamento**: uma medida de simetria quebrada numa janela;
- **com gap**: correlações de curto alcance;
- **cadeia XYZ de spin-$\frac{1}{2}$**: o modelo, seus vácuos e partículas.

Na Parte 4 juntamos todos esses blocos de construção.

Parte 4 — Montando o quebra-cabeça com os blocos de construção

Assimetria de emaranhamento na cadeia XYZ de spin-$\frac{1}{2}$ com gap

Assimetria de emaranhamento

Quanto uma janela de ℓ spins quebra a simetria de rotação em torno de z: a entropia ganha ao apagar as coerências entre setores de carga (Parte 2).

Com gap

Quasipartículas com massa, correlações exponenciais, comprimento de correlação finito $\xi \sim 1/M$ (Parte 3).

Cadeia XYZ de spin-$\frac{1}{2}$

Três acoplamentos diferentes; γ quebra a simetria explicitamente; vácuos Néel-x; kinks e breathers (Parte 3).

A pergunta que fazemos

Para uma janela de ℓ spins no estado fundamental, quanto vale $\Delta S_A^{(n)}(\ell)$ para uma cadeia *interagente*?

Quem tem qual simetria: o hamiltoniano e o estado

A régua: rotações em torno de z, o grupo $U(1)$

$U(\alpha) = e^{i\alpha Q}$, com $Q = \frac{1}{2}\sum_j \sigma_j^z$. É simetria da cadeia XXZ ($\gamma = 0$), *não* da XYZ. Mesmo assim serve de régua: a assimetria pergunta quão longe um estado está de ser invariante por esse grupo.

operação	H da XXZ	H da XYZ	estado: um vácuo Néel-x
rotação de qualquer α em torno de z: $U(1)$	✓	× quebra **explícita**, por γ	×
rotação de π em torno de z: $\mathbb{Z}_2$	✓	✓	× quebra **espontânea**
rotação de π em torno de x	✓	✓	✓
translação de um sítio	✓	✓	× troca os dois vácuos

Por que γ deixa só a $\mathbb{Z}_2$

O termo $\gamma\,(\sigma_j^+\sigma_{j+1}^+ + \text{h.c.})$ muda Q de ± 2. Sob $U(\alpha)$ ele ganha $e^{\pm 2i\alpha}$, que só vale 1 em $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$. Q deixa de ser conservada; a paridade de Q, não.

O estado que consideramos

O estado fundamental superpõe valores diferentes de Q (pares criados por γ) e fica em *um* dos dois vácuos, trocados pela rotação de π. Logo $[\rho_A, Q_A] \neq 0$.

O que a assimetria mede aqui: nada é quebrado para medir

O procedimento

1. Tome ρ_A como ele é: a janela no estado fundamental.
2. Apague as coerências entre setores de Q_A (média sobre as rotações em torno de z): $\rho_{A,Q}$.
3. $\Delta S_A = S(\rho_{A,Q}) - S(\rho_A)$: a entropia ganha.

A quebra já está em H e no estado; a assimetria só mede quanto havia para apagar.



um vácuo



estado "gato"



$\rho_{A,Q}$

Blocos: setores de carga. Laranja: coerências entre setores.

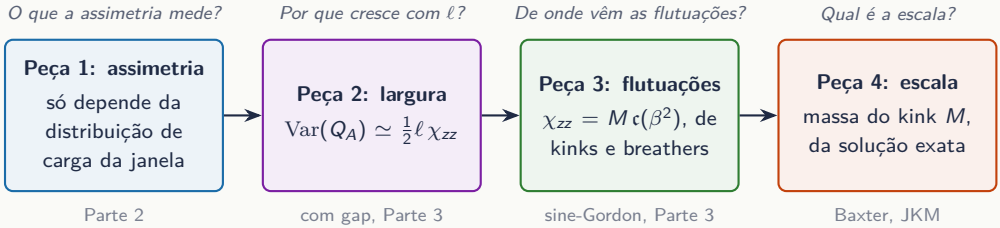
Qual quebra aparece onde

- **Explícita (γ):** a carga da janela tem distribuição gaussiana de largura $\propto \sqrt{\ell}$. Daí o $\frac{1}{2}\log \ell$. Quando $\gamma \to 0$, $\Delta S_A \to 0$.
- **Espontânea ($\mathbb{Z}_2$):** só uma constante, $\log 2$. Num vácuo há coerências entre cargas pares e ímpares; no estado "gato" (soma dos dois vácuos), só entre cargas de mesma paridade: menos a apagar.

Discreta versus contínua

Um grupo finito dá no máximo $\log |G|$ ($\log 2$ para a $\mathbb{Z}_2$). Só uma simetria contínua dá um termo que cresce com ℓ.

Como as peças se encaixam



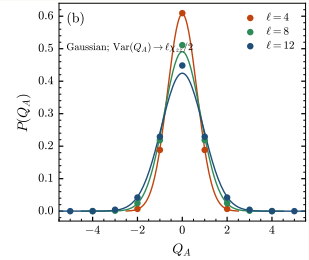
A ideia

A assimetria é uma pergunta sobre *coerências*. Peça por peça, ela vira uma pergunta sobre *partículas*: quantos pares de kinks o estado fundamental cria, e quanto eles custam.

Peça 1: a assimetria só vê a distribuição de carga

A ideia

- Apagar coerências = média sobre todas as rotações da janela (slide 12).
- Girada por α, a janela se sobrepõe à original com $Z_2(\alpha) = \mathrm{Tr}[\rho_A e^{i\alpha Q_A} \rho_A e^{-i\alpha Q_A}]/\mathrm{Tr}\rho_A^2 \approx e^{-V\alpha^2}$, onde $V \simeq \mathrm{Var}(Q_A)$: a largura da distribuição de carga.
- Distribuição larga $\Rightarrow$ cópia girada logo distinguível $\Rightarrow$ assimetria grande.



$P(Q_A = q) = \mathrm{Tr}(\Pi_q \rho_A)$: probabilidade de medir $Q_A = q$ na janela, para $\ell = 4, 8, 12$ em $(\Delta_z, \gamma) = (0.3, 0.2)$. Gaussianas que se alargam com ℓ.

Resultado da Peça 1

$$\Delta S_A^{(n)} \simeq \frac{1}{2} \log\left(2\pi\, \mathrm{Var}(Q_A)\right) + \frac{\log n}{2(n-1)}$$

Como a entropia de uma gaussiana: o log da sua largura.

▸ Derivação da fórmula mestra, passo a passo: A39–A50

Peça 2: o que é χ_{zz}, fisicamente?

Flutuação de carga por sítio

$$\chi_{zz} = \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Big(\langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle - \langle \sigma_0^z \rangle \langle \sigma_r^z \rangle \Big),$$

$$\mathrm{Var}(Q_A) \simeq \frac{\ell}{2}\, \chi_{zz}.$$

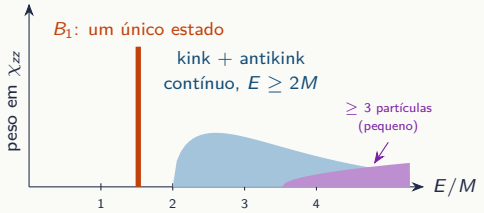
- $Q_A = \frac{1}{2} \sum_{j \in A} \sigma_j^z$; logo $\mathrm{Var}(Q_A) = \frac{1}{4} \sum_{i,j \in A} \langle \sigma_i^z \sigma_j^z \rangle_c$.
- Numa cadeia com gap, as correlações se anulam além de $\sim \xi$; então a soma dupla é ℓ vezes a soma sobre a distância $r = i - j$: $\mathrm{Var}(Q_A) \simeq \frac{\ell}{4} \sum_r \langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_c$.

Em resumo

Se o estado conservasse Q, o número de spins para cima numa janela ainda flutuaria, mas a cadeia inteira teria Q definido. Aqui o estado cria e destrói pares de spins para cima sem parar (termo γ): χ_{zz} mede quanto essa contagem "ferve" por unidade de comprimento.

Peça 3: como calcular χ_{zz}

1. **Afastar o zoom.** Com γ pequeno, o comprimento de correlação $1/M$ cobre muitos sítios. A física de longas distâncias esquece os detalhes da rede e é descrita por uma teoria quântica de campos no contínuo (*universalidade*). Aqui: o modelo de **sine-Gordon**.
2. **Contar flutuações.** Escreva χ_{zz} como soma sobre estados excitados (pares de kinks, breathers, ...), cada um com um peso conhecido ("fator de forma").
3. Q não é conservada: o termo γ cria e destrói pares de spins para cima o tempo todo. Cada processo "empresta" por um instante um estado excitado $|n\rangle$: um par kink–antikink ou um breather.



Quanto cada energia contribui para χ_{zz} (esboço, $\Delta_z < 0$). A área total é χ_{zz}.

Regra de soma

$$\chi_{zz} = \frac{2}{L} \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle n|\dot{Q}|0\rangle|^2}{E_n^2}$$

(amplitude para criar $|n\rangle)^2$ / (custo de energia)^2: todo termo é positivo, e os estados leves dominam.

▸ χ_{zz} em sine-Gordon, passo a passo: A51–A66

Visão geral: as peças juntas

Assimetria de emaranhamento na cadeia XYZ de spin-$\frac{1}{2}$ com gap

$$\Delta S_A^{(n)}(\ell) = \frac{1}{2}\log\left(\pi \ell\, \chi_{zz}\right) + \frac{\log n}{2(n-1)},$$

$$\chi_{zz} = M\, \mathfrak{c}(\beta^2).$$

- $\frac{1}{2}\log \ell$: uma simetria *contínua* quebrada, vista por uma janela (Parte 2).
- $\frac{\log n}{2(n-1)}$: geometria das réplicas, a mesma para toda cadeia com gap (Parte 1).
- χ_{zz}: susceptibilidade, específica do modelo (Parte 3).

O que é novo

- A primeira assimetria numa cadeia com gap *interagente*.
- Só a variância da carga importa, para qualquer cadeia com gap com flutuações de carga gaussianas.
- χ_{zz} calculado a partir de kinks e breathers de sine-Gordon, com a massa da rede (JKM).

▸ Perspectivas, computação quântica, glossário: A67–A71 ▸ Fórmula mestra, resultado: A50

Conteúdo do apêndice

A. Abertura e Parte 1 em detalhe

A2 A pergunta em uma frase (slide 1)
A3–A4 Teorema de Shannon, sequências típicas (slide 2)
A5–A9 Qubits, medição, dois spins (slide 4)
A10 Por que a autobase (slide 4)
A11–A15 Matrizes reduzidas, Schmidt (slide 6)
A16–A17 Cadeias, leis de área e logarítmica (slide 6)

B. Assimetria de emaranhamento em detalhe

A18–A20 Positividade (slide 13)

C. A cadeia XYZ em detalhe

A21–A22 Hamiltoniano, troca (slide 16)
A23–A25 Termos, simetria e γ (slide 18)
A26 Quasipartículas com e sem massa (slide 21)
A27 Exponencial vs lei de potência (slide 22)
A28–A29 Exemplos XX e Ising (slide 23)
A30 XYZ sem gap? (slide 24)
A31–A32 Duas quebras de simetria; vácuos (slide 26)
A33 Kinks em detalhe (slide 27)
A34–A35 Breathers em detalhe (slide 28)
A36–A38 Contínuo, bosonização, kink (slide 29)

D. Derivações por trás da Parte 4

A39–A42 Definições, projetores, momentos carregados (slide 37)
A43–A44 Segunda ordem nos ângulos: as larguras V_d (slide 37)
A45–A46 Largura igual à variância (slide 37)
A47–A48 Integral gaussiana sobre n ângulos (slide 37)
A49–A50 Variância da janela; resultado (slide 37)
A51–A53 χ_{zz}: limite de escala, carga, regra de soma (slide 39)
A54 Estados intermediários (slide 39)
A55–A57 Canal de dois kinks (slide 39)
A58–A60 Valor esperado do cosseno; canal do breather (slide 39)
A61 Cota inferior e ponto de férmions livres (slide 39)
A62–A64 A cauda: momentos T_{-1}, T_{+1}, corredor (slide 39)
A65–A66 Resultado; referências (slide 39)

E. Perspectivas e glossário

A67–A71 Perspectivas, comp. quântica, glossário (slide 40)

◂ Voltar ao slide 1

Apêndice A — Abertura e Parte 1 em detalhe

A pergunta em uma frase

Um ímã quântico está no seu estado de menor energia. Uma simetria de rotação está quase presente, mas não totalmente. Se olharmos só para uma janela de ℓ spins vizinhos,

quanto dessa simetria está faltando?

O que vamos obter

Uma fórmula válida para janelas longas,

$$\Delta S_A^{(n)}(\ell) = \frac{1}{2}\log(\pi\,\ell\,\chi_{zz}) + \frac{\log n}{2(n-1)} + \dots$$

e um modo de calcular o único número χ_{zz} de que ela precisa.

Três ingredientes

1. Estatística das flutuações de carga (qualquer cadeia com gap).
2. Uma teoria de campos (sine-Gordon) dá χ_{zz}/M.
3. A solução de Baxter na rede (via JKM) dá M em forma fechada.

Teorema de Shannon: por que $-\sum_i p_i \log p_i$

Três requisitos para $H(p_1, \ldots, p_N)$

1. contínua nas p_i;
2. para probabilidades iguais, $H_N = H(\frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N})$ cresce com N;
3. agrupamento: decompor um resultado em sub-resultados soma a incerteza média dos sub-resultados.

Teorema (Shannon 1948)

A única função assim é $H = -K \sum_i p_i \log p_i$, $K > 0$ (unidades).

Demonstração em três passos

1. NM resultados iguais em N grupos de M: $H_{NM} = H_N + H_M$. Uma função crescente e aditiva dos inteiros é $H_N = K \log N$.
2. $p_i = n_i/N$ racionais: agrupe N resultados iguais em blocos de tamanhos n_i, $K \log N = H(p) + \sum_i p_i K \log n_i$; logo $H(p) = -K \sum_i p_i \log p_i$.
3. p_i reais: por continuidade.

◂ Voltar ao slide 2 ▸ Conteúdo

O que H conta: sequências típicas

Lei dos grandes números

Sorteie n resultados independentes. A probabilidade da sequência é um produto; logo

$$-\frac{1}{n}\log p(x_1,\ldots,x_n) = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log p_{x_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} H.$$

Quase toda a probabilidade está nas sequências típicas, cada uma com probabilidade $\approx e^{-nH}$, e há $\approx e^{nH}$ delas.

Significado operacional

Rotular as sequências típicas custa nH nats: H nats ($H/\log 2$ bits) por símbolo, e nenhum código faz melhor (teorema da codificação de fonte).

Em resumo

O mesmo argumento, aplicado aos autovalores de ρ, dá a compressão quântica de Schumacher; aplicado aos coeficientes de Schmidt, dá a contagem de pares de Bell de S_A.

◂ Voltar ao slide 2 ▸ Conteúdo

Um spin-$\frac{1}{2}$: o bit quântico

Um spin-$\frac{1}{2}$ tem dois estados de base, "para cima" e "para baixo" ao longo de z:

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um estado geral é uma superposição $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Medir ao longo de z dá $\uparrow$ com probabilidade $|a|^2$.

As componentes do spin são as **matrizes de Pauli**:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Levantamento/abaixamento: $\sigma^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$, de modo que $\sigma^+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$, $\sigma^+|\uparrow\rangle = 0$.

Apontando ao longo de x

$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ satisfaz $\sigma^x|\rightarrow\rangle = +|\rightarrow\rangle$;
$|\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$ tem $\sigma^x = -1$.

Um spin ao longo de x é uma superposição de pesos iguais de para cima e para baixo em z: sua componente z é maximamente *incerta*.



◂ Voltar ao slide 4 ▸ Conteúdo

Medição: amplitudes dão probabilidades

Regra de Born

Se $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$, medir σ^z dá

$+1$ ($\uparrow$) com probabilidade $|a|^2$,

-1 ($\downarrow$) com probabilidade $|b|^2$,

e o estado salta para o observado.

Exemplo: spin ao longo de x

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\big): \qquad P(\uparrow) = P(\downarrow) = \frac{1}{2}.$$

Mas medir σ^x dá $+1$ com certeza.

Não é uma moeda

A moeda já é cara ou coroa antes de você olhar; você só não sabe. $|\rightarrow\rangle$ *não* é "cima ou baixo, não sabemos qual": é um estado definido (em x) que dá respostas aleatórias a uma pergunta sobre z.

Em resumo

A aleatoriedade quântica pode vir de uma pergunta sem resposta definida no estado. O emaranhamento é uma segunda fonte, mais profunda.

Dois spins: o produto tensorial

Dois spins têm quatro estados de base:

$$|\uparrow\uparrow\rangle, \quad |\uparrow\downarrow\rangle, \quad |\downarrow\uparrow\rangle, \quad |\downarrow\downarrow\rangle.$$

Um estado geral é uma superposição dos quatro,

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j\in\{\uparrow,\downarrow\}} C_{ij}\,|i\rangle_A|j\rangle_B, \qquad \sum_{ij}|C_{ij}|^2 = 1,$$

descrito, portanto, por uma tabela 2×2 de amplitudes:

$$C = \begin{pmatrix} C_{\uparrow\uparrow} & C_{\uparrow\downarrow} \\ C_{\downarrow\uparrow} & C_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}.$$

Contagem

Um spin: 2 números. Dois spins: $2\times 2 = 4$. N spins: 2^N. O número de amplitudes se *multiplica*, não se soma. Daí vêm tanto o poder quanto a dificuldade da física quântica de muitos corpos.

Notação

$|\uparrow\downarrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B$: spin A para cima e spin B para baixo. "$\otimes$" (produto tensorial) significa simplesmente "e".

Estados produto e estados emaranhados

Estado produto

Cada spin tem seu próprio estado:

$$|\psi\rangle = \big(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle\big)_A \otimes \big(c|\uparrow\rangle + d|\downarrow\rangle\big)_B,$$

i.e. a tabela fatora, $C_{ij} = \alpha_i \beta_j$:

$$C = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}, \qquad \det C = 0.$$

Estado emaranhado

Qualquer estado que *não* seja produto. Teste: se $\det C \neq 0$, não pode ser produto. Exemplo (o singleto):

$$|\psi^-\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det C = \frac{1}{2}.$$

Em resumo

Num estado produto, dá para descrever A sem mencionar B. Num estado emaranhado, não: não existe um "estado de A" como vetor.

Estados como matrizes densidade

Matriz densidade

Para um estado puro, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Para uma mistura estatística, $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Sempre: $\rho = \rho^\dagger$, $\rho \geq 0$, $\mathrm{Tr}\rho = 1$ e $\langle O\rangle = \mathrm{Tr}(\rho O)$.

- Diagonalize: $\rho|n\rangle = p_n|n\rangle$. Os autovalores $p_n \geq 0$ somam 1: são **probabilidades**.
- Estado puro $\Leftrightarrow$ um único $p_n = 1$, todos os outros 0.
- $\mathrm{Tr}\rho^2 = \sum_n p_n^2$ ("pureza") é 1 para um estado puro e menor para um misto.

Exemplo

$|{\rightarrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{\uparrow}\rangle + |{\downarrow}\rangle)$:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

As entradas fora da diagonal ("coerências") codificam a superposição. Uma mistura cara-ou-coroa de $\uparrow$ e $\downarrow$ seria $\frac{1}{2}\mathbb{1}$: mesma diagonal, nenhuma coerência.

Por que a autobase: a medição menos aleatória

Meça $\rho = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$ em outra base $\{|\varphi_m\rangle\}$

$$q_m = \langle\varphi_m|\rho|\varphi_m\rangle = \sum_i D_{mi}\lambda_i, \qquad D_{mi} = |\langle\varphi_m|i\rangle|^2.$$

Linhas e colunas de D somam um: D é *duplamente estocástica*.

Misturar aumenta a entropia

$\eta(x) = -x\log x$ é côncava; logo (Jensen) $\eta(q_m) \geq \sum_i D_{mi}\eta(\lambda_i)$. Somando em m:

$$H(q) \geq H(\lambda) = S(\rho).$$

Resultado principal

$$S(\rho) = \min_{\text{bases}} H\big(\{\langle\varphi_m|\rho|\varphi_m\rangle\}\big),$$

atingido na autobase.

Em resumo

Qualquer outra medição acrescenta aleatoriedade própria. $S(\rho)$ é o que sobra quando a medição é escolhida da forma mais esperta possível.

◂ Voltar ao slide 4 ▸ Conteúdo

A Parte 1 numa figura

- Dois objetos quânticos podem compartilhar um estado que não pode ser dividido num estado para cada um: eles estão emaranhados.
- Olhe só para um deles: ele se comporta como se tivesse sido preparado ao acaso, embora o par esteja num estado perfeitamente definido.
- A quantidade dessa "aleatoriedade aparente" é a entropia de emaranhamento.

Analogia: uma fotografia rasgada

Uma foto rasgada em duas. Cada metade sozinha parece um fragmento sem sentido; a informação está em como as duas metades se encaixam. Emaranhamento é informação guardada *só* nas correlações entre as partes.

A matriz densidade reduzida, calculada

Receita para $|\psi\rangle = \sum_{ij} C_{ij}|i\rangle|j\rangle$ puro

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B|\psi\rangle\langle\psi|, \qquad (\rho_A)_{ii'} = \sum_j C_{ij}\, C^*_{i'j},$$

i.e. $\rho_A = CC^\dagger$ (produto de matrizes).

Estado produto, $C = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}$

$$CC^\dagger = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} = |\varphi_A\rangle\langle\varphi_A| :$$

estado puro: A tem estado próprio definido.

Singleto

$$CC^\dagger = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{2} :$$

o estado mais aleatório de um spin.

Resultado principal

Todo puro e emaranhado $\Rightarrow$ parte mista.

Mais emaranhamento, ρ_A mais misto.

Entropia de emaranhamento: a definição

Entropia de emaranhamento de $|\psi\rangle$ puro, dividido em A e B

$$S_A = -\operatorname{Tr} \rho_A \log \rho_A, \qquad \rho_A = \operatorname{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|.$$

Propriedades

1. $S_A = 0 \iff |\psi\rangle$ é um estado produto.
2. $S_A \leq \log$(dimensão da parte menor).
3. $S_A = S_B$: os dois lados igualmente emaranhados.
4. Inalterada por operações só em A ou só em B.

O que significa

$S_A/\log 2$ é o número de pares de Bell "escondidos" em $|\psi\rangle$: com muitas cópias, destilam-se $S_A/\log 2$ singletos por cópia com operações locais e mensagens clássicas, e não mais.

Analogia

Emaranhamento é dinheiro; o singleto, a moeda; S_A, a taxa de câmbio.

A decomposição de Schmidt: a impressão digital de um estado puro

Teorema de Schmidt

Todo estado puro de $A \cup B$ pode ser escrito como

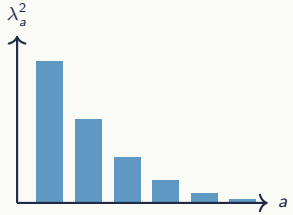
$$|\psi\rangle = \sum_{a=1}^{r} \lambda_a \, |u_a\rangle_A |v_a\rangle_B,$$

com $\lambda_a > 0$, $\sum_a \lambda_a^2 = 1$, $|u_a\rangle$ ortonormais e $|v_a\rangle$ ortonormais.

Como

SVD da tabela de amplitudes, $C = U\Lambda V^\dagger$. Então $\rho_A = \sum_a \lambda_a^2 |u_a\rangle\langle u_a|$; logo

$$S_A = -\sum_a \lambda_a^2 \log \lambda_a^2.$$



espectro de Schmidt

Em resumo

Os λ_a^2 bastam. Um só λ não nulo: produto. Muitos λ iguais: muito emaranhado. λ decaindo rápido: pouco emaranhado e *barato no computador* (Apêndice E).

◂ Voltar ao slide 6 ▸ Conteúdo

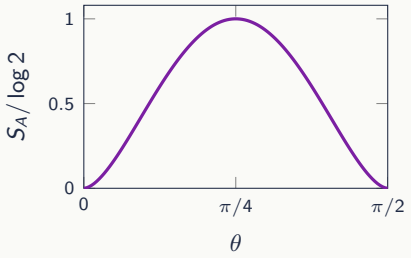
Exemplos resolvidos

Um estado ajustável

$$|\psi_\theta\rangle = \cos\theta\,|\uparrow\downarrow\rangle + \sin\theta\,|\downarrow\uparrow\rangle :$$

já na forma de Schmidt, com $\lambda_1^2 = \cos^2\theta$, $\lambda_2^2 = \sin^2\theta$; logo

$$S_A = -\cos^2\theta \log\cos^2\theta - \sin^2\theta \log\sin^2\theta.$$

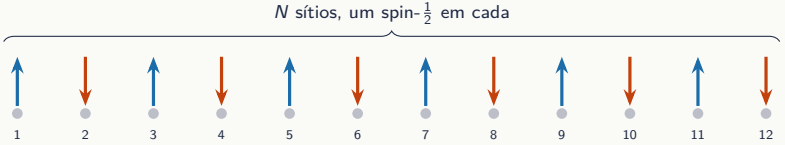


- Estado GHZ $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle)$: $S_A = \log 2$ para qualquer corte.
- Um spin invertido espalhado por N sítios (estado W): $S_A = h(\ell/N) \leq \log 2$.
- Produto de singletos nas ligações $(1,2), (3,4), \ldots$: $S_A = \log 2 \times$(número de singletos cortados).

Em resumo

$\theta = 0, \frac{\pi}{2}$: produto, $S = 0$. $\theta = \frac{\pi}{4}$: par de Bell, $S = \log 2$, um bit inteiro.

Muitos spins: uma cadeia, e por que é difícil



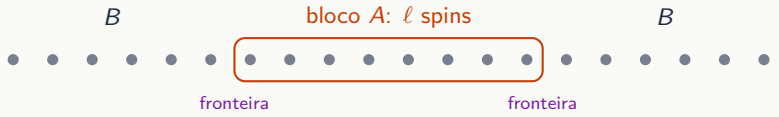
- Os estados da cadeia inteira vivem no espaço **produto tensorial**: base $|s_1 s_2 \cdots s_N\rangle$, $s_j \in \{\uparrow, \downarrow\}$.
- Dimensão $= 2^N$. Um estado geral precisa de 2^N números complexos.
- σ_j^a age só no spin j: $\sigma_j^a = \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \sigma^a \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}$.

A parede exponencial

$N = 20$: 10^6 números (fácil).
$N = 50$: 10^{15} (impossível de guardar).
$N = \infty$: o que realmente queremos.

O Apêndice E explica como os *estados de produto de matrizes* vencem essa parede para os estados de que precisamos.

Emaranhamento de um bloco numa cadeia



A pergunta da Parte 1

A cadeia está no estado fundamental. Como a entropia de emaranhamento $S_A(\ell)$ de um bloco de ℓ spins consecutivos cresce com ℓ?

Em resumo

A resposta diz se a cadeia é com gap ou sem gap (Parte 3), quão cara é sua simulação (Apêndice E) e — num ponto crítico — um número universal chamado carga central c.

Apêndice B — Assimetria de emaranhamento em detalhe

Por que ela é não negativa (caso de von Neumann)

$n \to 1$: a assimetria é uma entropia relativa

1. $\rho_{A,Q}$ é bloco-diagonal; logo $\log \rho_{A,Q}$ também é: $\Pi_q \log \rho_{A,Q} \Pi_{q'} = 0$ para $q \neq q'$.
2. Portanto só entram os blocos diagonais de ρ_A:
   $\mathrm{Tr}[\rho_A \log \rho_{A,Q}] = \sum_q \mathrm{Tr}[\Pi_q \rho_A \Pi_q \log \rho_{A,Q}] = \mathrm{Tr}[\rho_{A,Q} \log \rho_{A,Q}] = -S(\rho_{A,Q})$.
3. Assim,
   $$\mathrm{Tr}\left[\rho_A(\log \rho_A - \log \rho_{A,Q})\right] = -S(\rho_A) + S(\rho_{A,Q}) = \Delta S_A.$$
4. O lado esquerdo é a **entropia relativa** quântica $S(\rho_A \| \rho_{A,Q})$, que é ≥ 0, com igualdade sse $\rho_A = \rho_{A,Q}$ (desigualdade de Klein).

n geral

Os autovalores de $\rho_{A,Q}$ são "médias" dos de ρ_A (tecnicamente: majorizados por eles), e toda entropia de Rényi cresce sob essas médias. Igualdade só se nada foi promediado.

Para que serve a assimetria

Teoria de recursos da assimetria

Estados que quebram uma simetria são um *recurso*: servem de referencial (direção comum, fase de relógio). Operações simétricas não o criam. ΔS_A é a medida padrão de quanto dele um estado tem (Vaccaro et al. 2008; Gour, Marvian, Spekkens 2009).

- Nunca aumenta sob operações simétricas.
- Zero sse o estado é simétrico.
- Medida com as medições aleatorizadas que dão as entropias de Rényi (íons, 2024).

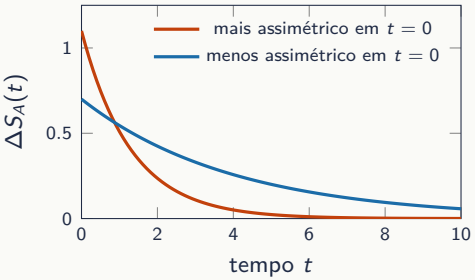
Dois laboratórios, sem norte comum

Alice quer dizer a Bob para onde é "x", mas não há direção de referência comum. Enviar spins apontando em x ajuda; sua utilidade depende de quão assimétricos são.

Discreta versus contínua

Para um grupo finito com $|G|$ elementos, $\Delta S \leq \log |G|$: p. ex. no máximo $\log 2$ para $\mathbb{Z}_2$ (inversão de spin). Só simetrias contínuas, como rotações, permitem crescer sem limite, como $\frac{1}{2} \log \ell$.

Assimetria no tempo



- Prepare um estado que quebra a simetria e deixe-o evoluir com um hamiltoniano *simétrico*. A janela esquece aos poucos sua orientação: $\Delta S_A(t) \to 0$.
- Surpresa: o estado inicial *mais* assimétrico pode ficar simétrico *mais rápido* — uma versão quântica da água quente que congela antes da fria (Ares, Murciano, Calabrese 2023).
- Observado com íons aprisionados (Joshi et al. 2024).

Em resumo

O artigo calcula a assimetria de *equilíbrio* de uma cadeia interagente com gap: a linha de base para essa dinâmica.

◂ Voltar ao slide 13 ▸ Conteúdo

Apêndice C — A cadeia XYZ em detalhe

Energia, hamiltoniano, estado fundamental

Hamiltoniano

Uma matriz hermitiana H cujos autovalores $E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \ldots$ são as energias permitidas: $H|n\rangle = E_n|n\rangle$. O autovetor $|0\rangle$ de menor energia é o **estado fundamental**.

- A temperatura zero, um sistema relaxa para o estado fundamental. Todas as afirmações de "equilíbrio" desta palestra se referem a $|0\rangle$.
- Números mensuráveis são **valores esperados**: $\langle O\rangle = \langle 0|O|0\rangle$.
- Evolução temporal: $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle$; um operador evolui como $\dot{O} = i[H, O]$.

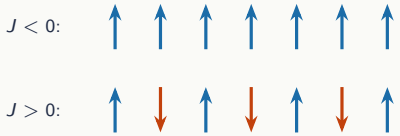
Em resumo

H é a "contabilidade de energia" do ímã: cada termo diz quais arranjos de spins vizinhos custam energia e quais a economizam. O estado fundamental é o melhor compromisso entre todos os termos ao mesmo tempo.

Troca: vizinhos querem se alinhar ou se anti-alinhar

A interação mais simples entre dois spins vizinhos é

$$H_{\text{par}} = J\,\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z, \qquad \sigma_j^z\sigma_{j+1}^z = \begin{cases} +1 & \uparrow\uparrow \text{ ou } \downarrow\downarrow \\ -1 & \uparrow\downarrow \text{ ou } \downarrow\uparrow \end{cases}$$



- $J < 0$: pares alinhados têm energia menor: ferromagneto $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$.
- $J > 0$: pares anti-alinhados têm energia menor: antiferromagneto $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$.

Em resumo

O acoplamento vem do princípio de Pauli e do salto de elétrons entre íons ("troca"), não da minúscula força de dipolo magnético.

Acoplamentos em três eixos

Spins têm três componentes; em geral

$$H = \sum_j \left(J_x\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x + J_y\sigma_j^y\sigma_{j+1}^y + J_z\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z\right),$$

um acoplamento por eixo. "XYZ": os três são diferentes.

O que cada termo faz com os spins

$\sigma^z\sigma^z$: uma energia, sem movimento

Diagonal na base $\uparrow/\downarrow$: não muda a configuração, apenas atribui $\pm J_z$ a cada ligação.

$\sigma^x\sigma^x + \sigma^y\sigma^y$: flip-flop

Com $\sigma^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$,

$$\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y\sigma_{j+1}^y = 2\left(\sigma_j^+\sigma_{j+1}^- + \sigma_j^-\sigma_{j+1}^+\right) :$$

$\uparrow\downarrow \leftrightarrow \downarrow\uparrow$. Um spin para cima *salta* para o sítio vizinho; o número de spins para cima não muda.

$\sigma^x\sigma^x - \sigma^y\sigma^y$: criação de pares

$$\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x - \sigma_j^y\sigma_{j+1}^y = 2\left(\sigma_j^+\sigma_{j+1}^+ + \sigma_j^-\sigma_{j+1}^-\right) :$$

$\downarrow\downarrow \leftrightarrow \uparrow\uparrow$. Dois spins para cima aparecem ou somem juntos: o número de spins para cima muda de ± 2.

Resultado principal

O hopping conserva $Q = \frac{1}{2}\sum \sigma^z$; a criação de pares, não. Se $J_x = J_y$ ou não decide se existe a simetria de rotação em torno de z — a simetria cuja quebra medimos.

Simetria, e a carga Q

Simetria

Uma unitária U com $[H, U] = 0$. Se $U(\alpha) = e^{i\alpha Q}$ para todo α real, Q é seu **gerador** ("carga"), e $[H, Q] = 0$ significa que Q é conservada: $\dot{Q} = i[H, Q] = 0$.

Rotações de ângulo α em torno de z são geradas pela magnetização total em z

$$Q = \frac{1}{2}\sum_j \sigma_j^z \qquad \text{(autovalores: semi-inteiros ou inteiros).}$$

Elas agem como $e^{i\alpha Q}\sigma_j^{\pm}e^{-i\alpha Q} = e^{\pm i\alpha}\sigma_j^{\pm}$.

A XXZ é simétrica

$\sigma^x\sigma^x + \sigma^y\sigma^y = 2(\sigma_j^+\sigma_{j+1}^- + \sigma_j^-\sigma_{j+1}^+)$ ganha um fator $e^{i\alpha}e^{-i\alpha} = 1$; $\sigma^z\sigma^z$ fica intacto.
Logo $[H_{\mathrm{XXZ}}, Q] = 0$: uma simetria contínua $U(1)$.

Em resumo

$U(1)$ = "girar todos os spins pelo mesmo ângulo em torno de z". Na XXZ nada muda na energia; Q (número de spins para cima menos $N/2$) não pode ser criada nem destruída.

Quebra explícita: o que γ faz

Reescrevendo a anisotropia

$$\gamma(\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x - \sigma_j^y\sigma_{j+1}^y) = 2\gamma\,(\sigma_j^+\sigma_{j+1}^+ + \sigma_j^-\sigma_{j+1}^-).$$

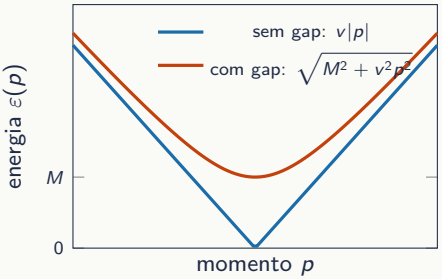
Verificação: $\sigma^x\sigma^x - \sigma^y\sigma^y$ com $\sigma^x = \sigma^+ + \sigma^-$, $\sigma^y = -i(\sigma^+ - \sigma^-)$ dá $(\sigma^+ + \sigma^-)(\sigma^+ + \sigma^-) + (\sigma^+ - \sigma^-)(\sigma^+ - \sigma^-) = 2(\sigma^+\sigma^+ + \sigma^-\sigma^-)$ (operadores em sítios diferentes).

- $\sigma_j^+\sigma_{j+1}^+$ vira dois spins para baixo para cima: muda Q de $+2$.
  Formalmente $[Q, \sigma_j^+\sigma_{j+1}^+] = 2\,\sigma_j^+\sigma_{j+1}^+$.
- Logo $[H, Q] \neq 0$: Q **não é conservada**. Isso é quebra **explícita** de simetria: escrita no próprio H.

O que sobrevive

Sob $e^{i\alpha Q}$ o termo ganha $e^{\pm 2i\alpha}$; assim, só $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$ continuam simetrias. $U(1)$ se reduz a $\mathbb{Z}_2 = \{1, e^{i\pi Q}\}$, a rotação de π em torno de z.

Quasipartículas com e sem massa



- Sem gap: existem excitações de energia arbitrariamente baixa (como fótons, ondas sonoras). $\varepsilon = v|p|$.
- Com gap: toda excitação custa pelo menos M (como uma partícula massiva na relatividade, com a "velocidade da luz" substituída pela velocidade das ondas de spin v). $\varepsilon = \sqrt{M^2 + v^2p^2}$.

Resultado principal

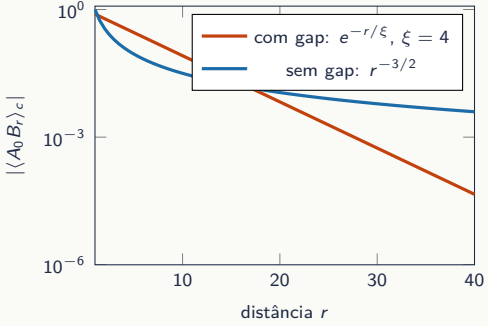
Numa cadeia com gap, o gap *é* a massa da quasipartícula mais leve. Na cadeia XYZ essa partícula é o kink (adiante), e sua massa M pode ser calculada.

Correlações: exponencial versus lei de potência

Correlação conexa

$\langle A_0 B_r \rangle_c \equiv \langle A_0 B_r \rangle - \langle A_0 \rangle \langle B_r \rangle$.
É zero quando o que acontece em 0 não diz nada sobre o que acontece em r.

- Com gap: $\langle \cdot \rangle_c \sim e^{-r/\xi}$ — "cluster". Regiões distantes são quase independentes.
- É essa independência que torna finitas as *somas* de correlações, p. ex. a susceptibilidade $\chi_{zz} = \frac{1}{2} \sum_r \langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_c$, que controla nossa resposta.

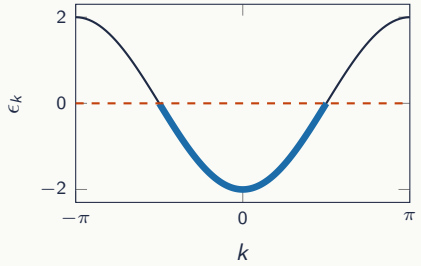


Um exemplo sem gap: a cadeia XX é um mar de Fermi

$$H_{XX} = -\frac{1}{2}\sum_j \left(\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y\right)$$

$$= -\sum_j \left(c_j^\dagger c_{j+1} + \text{h.c.}\right)$$

- Spins para cima saltam e não podem ocupar o mesmo sítio: comportam-se como *férmions* (Jordan–Wigner).
- Férmions livres com energias $\epsilon_k = -2\cos k$. O estado fundamental preenche todos os $\epsilon_k < 0$: o mar de Fermi.
- Levar um férmion de logo abaixo para logo acima do nível de Fermi custa energia arbitrariamente pequena: **sem gap**.



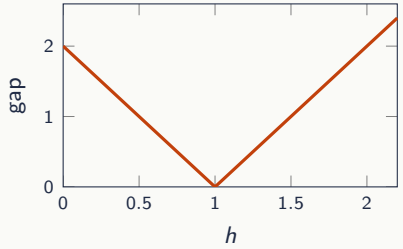
Em resumo

Estados preenchidos (azul) até o nível de Fermi (tracejado). As correlações decaem como $1/r^2$; a entropia do bloco é $S_A = \frac{1}{3}\log \ell + \ldots$ $(c = 1)$.

Um exemplo com gap, e uma transição de fase: a cadeia de Ising

$$H = -\sum_j \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x - h \sum_j \sigma_j^z$$

- $h = 0$: dois estados fundamentais ordenados, $\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ e $\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow$. A excitação mais barata é uma parede de domínio: gap = custo de uma ligação quebrada. **Com gap, ordenada.**
- $h \gg 1$: todos os spins ao longo de z; inverter um custa $\sim 2h$. **Com gap, desordenada.**
- $h = 1$: o gap fecha, $\Delta \propto |h - 1|$. **Sem gap**: um ponto crítico quântico ($c = \frac{1}{2}$).



Resultado principal

Um ponto sem gap é em geral a *fronteira* entre duas fases com gap: o gap fecha onde a natureza do estado fundamental muda.

Existe uma cadeia XYZ sem gap?

Só onde a U(1) é restaurada

O gap só fecha quando dois acoplamentos coincidem (em módulo), i.e. quando a cadeia é, disfarçada, uma XXZ num referencial girado, *e* essa XXZ é crítica, $-1 < \Delta_{\mathrm{ef}} \leq 1$:

- $\gamma = 0$, $|\Delta_z| < 1$: XXZ em torno de z — **sem gap**.
- $\Delta_z = \pm(1+\gamma)$: XXZ em torno de y — **sem gap**.
- Três acoplamentos diferentes: **sempre com gap** (Baxter).

Na nossa janela

Para $\gamma > 0$ e $|\Delta_z| < 1$ a cadeia tem gap em toda parte. A linha $\gamma = 0$ é a transição entre a ordem de Néel em x ($\gamma > 0$) e em y ($\gamma < 0$).

Atenção

Na linha sem gap o estado fundamental é simétrico, $[\rho_A, Q_A] = 0$; logo a assimetria é *zero*. Quando $\gamma \to 0$ com ℓ fixo, $\Delta S_A \to 0$.

Duas maneiras de quebrar uma simetria

Quebra explícita

As *regras* (o hamiltoniano) não são simétricas: $[H, U] \neq 0$.

Analogia

Uma bola numa mesa *inclinada* rola para baixo: a própria mesa tem direção preferida.



Resultado principal

Na XYZ: $\gamma \neq 0$ quebra explicitamente a U(1) (rotação em torno de z).

Quebra espontânea

As regras são simétricas, mas o *estado fundamental* não: ele escolhe uma de várias opções equivalentes.

Analogia

Um lápis equilibrado na ponta cai em *alguma* direção, embora todas sejam equivalentes.



Resultado principal

Na XYZ: o estado escolhe um de dois padrões Néel-x: quebra espontânea de $\mathbb{Z}_2$.

Por que ao longo de x, e o que “vácuo” significa

- O acoplamento em x, $1+\gamma$, é o maior acoplamento positivo; então a energia é mínima quando vizinhos se anti-alinham em x. Com $\gamma < 0$ seria y.
- A simetria deixada por γ é a rotação de π em torno de z: $\sigma^x \to -\sigma^x$, $\sigma^y \to -\sigma^y$. Ela leva um padrão Néel-x no outro.
- Numa cadeia finita, o verdadeiro estado fundamental é a superposição simétrica (um “gato”), separada da antissimétrica por uma energia $\sim e^{-N/\xi}$. Numa cadeia infinita elas ficam degeneradas e o estado físico é um dos dois.

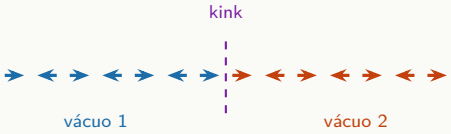
Vácuo

Termo de teoria de campos para “um estado fundamental”. A cadeia XYZ tem dois vácuos, $|0_1\rangle$ e $|0_2\rangle$, com a mesma energia. Excitações são perturbações sobre um vácuo.

Para a assimetria

O cálculo é feito em *um* vácuo (o físico). O estado gato daria a mesma resposta deslocada de $-\log 2$.

Kinks em mais detalhe



- Dois spins vizinhos apontam no *mesmo* sentido: uma ligação "frustrada", um custo de energia.
- A parede se move (o hopping a desloca); logo, carrega momento: uma partícula.
- Flutuações quânticas espalham a parede por $\sim \xi$ sítios; sua energia de repouso é a massa M.

Topológico

Um kink não sai com uma mudança local: bem à esquerda vê-se o vácuo 1, bem à direita o vácuo 2, aconteça o que for perto da parede. Só outra parede (um *antikink*) o desfaz.

Kinks vêm em pares

A partir de um vácuo, operações locais criam paredes em pares: inverter um spin de $\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow$ cria duas. As excitações mais leves são pares kink–antikink, de energia $\geq 2M$.

Breathers, explicados

Estados ligados

Elétron e próton se atraem e formam o hidrogênio, mais leve que os dois separados (energia de ligação). Kink e antikink que se atraem formam um breather, mais leve que $2M$.

Massas (sine-Gordon)

$$m_{B_n} = 2M \sin \frac{n\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2}, \qquad n = 1, 2, \cdots < \frac{1}{\xi_{\mathrm{sG}}},$$

com $\xi_{\mathrm{sG}} < 1$ no lado atrativo $\Delta_z < 0$.

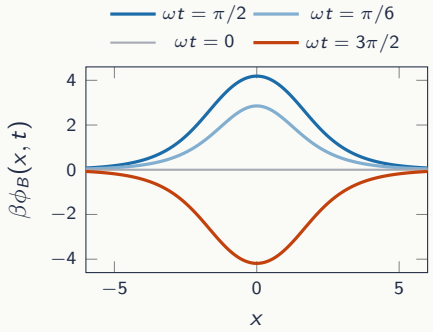
Por que "breather"

Na teoria clássica, o estado ligado é um kink e um antikink em órbita; o perfil do campo incha e encolhe, como um pulmão ("breather" = "o que respira"; próximo slide).

Para o artigo

Para $\Delta_z < 0$ a carga quebrada pode criar sozinho o breather mais leve, B_1, que contribui para as flutuações de carga junto com os pares de kinks. Para $\Delta_z > 0$ só os pares contribuem.

O breather clássico: um kink e um antikink em órbita



Solução breather (unidades $m = 1$)

$$\beta\phi_B = 4\arctan\left[\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega}\,\frac{\sin\omega t}{\cosh(\sqrt{1-\omega^2}\,x)}\right]$$

Em resumo

A lombada cresce, encolhe, troca de sinal e volta: "respira". Longe, o campo está no *mesmo* vácuo dos dois lados: sem parede líquida, um operador local pode criá-lo. Na teoria quântica a frequência é quantizada: as massas m_{B_n}.

Afastando o zoom: da rede a um campo

- Quando $\xi \gg 1$ sítio, a física interessante acontece em muitos sítios. Vista de longe, a cadeia parece um meio *contínuo*.
- Troque os spins por um campo suave $\phi(x)$ que varia lentamente de sítio a sítio: uma teoria de campos.
- Suas previsões são universais: redes diferentes com as mesmas simetrias e o mesmo comportamento a longas distâncias dão as mesmas respostas quando os comprimentos são medidos em unidades de ξ.

Água

A água é feita de moléculas, mas as ondas num lago são descritas por equações suaves de fluidos. Os detalhes moleculares entram só por alguns números (densidade, viscosidade).

Em resumo

Aqui os "poucos números" são a massa do kink M e o acoplamento β^2 (equivalentemente, Δ_z). A assimetria dependerá da rede só por meio deles.

Bosonização

- Em $\gamma = 0$ a cadeia XXZ é sem gap. Suas excitações de baixa energia são ondas de densidade/fase de comprimento de onda longo: um **campo bosônico** livre $\phi(x, t)$ (um "líquido de Luttinger").
- Operadores de spin locais viram exponenciais ("operadores de vértice") $e^{ia\phi}$ do campo.
- A interação Δ_z muda a rapidez do decaimento das correlações, por meio de um único número:

$$\beta^2 = 1 - \frac{\theta_0}{\pi}, \qquad \theta_0 = \arccos \Delta_z,$$

ou, equivalentemente, o parâmetro de Luttinger $K = 1/(2\beta^2)$.

Δ_z	θ_0	β^2	K
$\to -1$	π	0	∞
-0.5	$2\pi/3$	$1/3$	$3/2$
0	$\pi/2$	$1/2$	1
0.3	1.266	0.597	0.838
0.5	$\pi/3$	$2/3$	$3/4$
$\to 1$	0	1	$1/2$

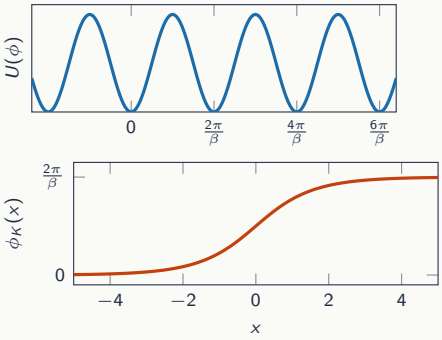
Em resumo

Em $\Delta_z = 0$, $\beta^2 = \frac{1}{2}$: o ponto de férmions livres. Nesta convenção, $e^{ia\phi}$ tem dimensão de escala $2a^2$.

◂ Voltar ao slide 29 ▸ Conteúdo

Sine-Gordon clássico: vácuos e a solução de kink

- Potencial $U(\phi) = 2\mu(1 - \cos\beta\phi)$: infinitos mínimos $\phi_k = 2\pi k/\beta$.
- **Kink**: uma solução estática que vai de $\phi = 0$ a $2\pi/\beta$.



Encontrando-o (truque de Bogomolny)

A energia estática $E = \int[\frac{1}{16\pi}\phi'^2 + U]\mathrm{d}x$ é mínima, com extremos fixos, quando $\frac{1}{16\pi}\phi'^2 = U(\phi)$, i.e. $\phi' = 8\sqrt{\pi\mu}\,|\sin\frac{\beta\phi}{2}|$. Integrando,

$$\phi_K(x) = \frac{4}{\beta}\arctan e^{mx}, \qquad m = 4\beta\sqrt{\pi\mu}.$$

O campo está num vácuo à esquerda e no vizinho à direita: uma parede de domínio de largura $\sim 1/m$. O "antikink" vai no sentido oposto.

Apêndice D — Derivações por trás da Parte 4

Fórmula mestra, passo 1: definições

- Janela A de ℓ sítios consecutivos (ℓ par) no estado fundamental $|0\rangle$ de uma cadeia com gap:

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B |0\rangle\langle 0|, \qquad Q_A = \frac{1}{2}\sum_{j\in A}\sigma_j^z, \qquad Q_A|q\rangle = q|q\rangle, \quad q \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

- Projetores nos setores de carga da janela:

$$\Pi_q \Pi_{q'} = \delta_{qq'}\Pi_q, \qquad \sum_q \Pi_q = \mathbf{1}. \tag{2}$$

- Estado simetrizado e assimetria de emaranhamento de Rényi:

$$\rho_{A,Q} = \sum_q \Pi_q \rho_A \Pi_q, \qquad \Delta S_A^{(n)} = \frac{1}{1-n}\log\frac{\mathrm{Tr}\rho_{A,Q}^n}{\mathrm{Tr}\rho_A^n}. \tag{3}$$

- Daqui em diante $\rho \equiv \rho_A$ e $Q \equiv Q_A$.

Fórmula mestra, passo 2: projetor como integral de Fourier

- Representação de Fourier do projetor:

$$\Pi_q = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} e^{i\alpha(Q-q)}. \tag{4}$$

- Verificação em um autoestado de carga q', com $q' - q$ inteiro:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} e^{i\alpha(q'-q)} = \frac{\sin \pi(q'-q)}{\pi(q'-q)} = \delta_{q'q}. \tag{5}$$

- Inserir (4) nos dois projetores de $\rho_{A,Q}$:

$$\rho_{A,Q} = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\alpha'}{(2\pi)^2} e^{-i(\alpha+\alpha')q} e^{i\alpha Q} \rho e^{i\alpha' Q}. \tag{6}$$

Fórmula mestra, passo 3: média sobre rotações

- A soma sobre q em (6) é uma delta periódica:

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} e^{-i(\alpha+\alpha')q} = 2\pi \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(\alpha+\alpha'-2\pi m). \tag{7}$$

- Ela fixa $\alpha' = -\alpha$. Com a troca $\alpha \to -\alpha$:

$$\rho_{A,Q} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha Q} \rho e^{i\alpha Q}. \tag{8}$$

- n-ésima potência de (8), com um ângulo por fator:

$$\rho_{A,Q}^{n} = \int \prod_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\alpha_j}{2\pi} \left(e^{-i\alpha_1 Q} \rho e^{i\alpha_1 Q}\right)\left(e^{-i\alpha_2 Q} \rho e^{i\alpha_2 Q}\right)\cdots\left(e^{-i\alpha_n Q} \rho e^{i\alpha_n Q}\right). \tag{9}$$

Fórmula mestra, passo 4: momentos carregados

- Em (9) rotações vizinhas se fundem, $e^{i\alpha_j Q}e^{-i\alpha_{j+1}Q} = e^{iu_j Q}$. Sob o traço, o primeiro fator vai para o fim por ciclicidade. Diferenças de ângulos:

$$u_j = \alpha_j - \alpha_{j+1}, \qquad \alpha_{n+1} \equiv \alpha_1, \qquad \sum_{j=1}^{n} u_j = 0, \tag{10}$$

- Razão dos traços e momento carregado:

$$\frac{\mathrm{Tr}\rho_{A,Q}^n}{\mathrm{Tr}\rho_A^n} = \int_{[-\pi,\pi]^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\alpha_j}{2\pi} Z_n(\vec{u}), \tag{11}$$

$$Z_n(\vec{u}) = \frac{\mathrm{Tr}\left[\rho e^{iu_1 Q}\rho e^{iu_2 Q}\cdots\rho e^{iu_n Q}\right]}{\mathrm{Tr}\rho^n}. \tag{12}$$

- $Z_n(\vec{0}) = 1$, e Z_n é 2π-periódico em cada α_j porque as cargas são inteiras.

Fórmula mestra, passo 5: segunda ordem nos ângulos (1/2)

- Expandir cada $e^{iu_r Q} = \mathbf{1} + iu_r Q - \frac{1}{2}u_r^2 Q^2 + \ldots$ em (12):

$$Z_n = 1 + i\frac{\mathrm{Tr}(\rho^n Q)}{\mathrm{Tr}\rho^n}\sum_r u_r - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Tr}(\rho^n Q^2)}{\mathrm{Tr}\rho^n}\sum_r u_r^2 - \sum_{r<r'} u_r u_{r'}\frac{\mathrm{Tr}\left(Q\rho^{r'-r}Q\rho^{n-r'+r}\right)}{\mathrm{Tr}\rho^n} + \mathcal{O}(u^3). \quad (13)$$

- O termo linear se anula por (10), logo $\log Z_n = Z_n - 1 + \mathcal{O}(u^3)$.
- Na autobase $\rho|a\rangle = p_a|a\rangle$, com $Q_{ab} = \langle a|Q|b\rangle$:

$$\mathrm{Tr}(\rho^n Q^2) = \sum_{a,b} p_a^n |Q_{ab}|^2, \qquad \mathrm{Tr}\left(Q\rho^d Q\rho^{n-d}\right) = \sum_{a,b} p_a^d p_b^{n-d}|Q_{ab}|^2. \quad (14)$$

- Os termos $a = b$ de (13) somam

$$-\frac{1}{2}\frac{\sum_a p_a^n Q_{aa}^2}{\mathrm{Tr}\rho^n}\left(\sum_r u_r\right)^2 = 0. \quad (15)$$

Fórmula mestra, passo 5: segunda ordem nos ângulos (2/2)

- Para os termos $a \neq b$ defina

$$E = \frac{1}{\mathrm{Tr}\rho^n} \sum_{a \neq b} p_a^n |Q_{ab}|^2, \qquad \Phi_d = \frac{1}{\mathrm{Tr}\rho^n} \sum_{a \neq b} p_a^d p_b^{n-d} |Q_{ab}|^2. \tag{16}$$

- Então

$$\log Z_n = -\frac{E}{2} \sum_r u_r^2 - \sum_{r<r'} \Phi_{r'-r} u_r u_{r'} + \mathcal{O}(u^3). \tag{17}$$

- Por (10), $\sum_r u_r^2 = -2 \sum_{r<r'} u_r u_{r'}$:

$$\log Z_n(\vec{u}) = \sum_{r<r'} V_{r'-r} u_r u_{r'} + \mathcal{O}(u^3), \qquad V_d = E - \Phi_d, \tag{18}$$

$$V_d = \frac{1}{2\mathrm{Tr}\rho^n} \sum_{a \neq b} |Q_{ab}|^2 \left(p_a^d - p_b^d\right)\left(p_a^{n-d} - p_b^{n-d}\right), \qquad d = 1, \ldots, n-1. \tag{19}$$

- A forma (19) usa $|Q_{ab}| = |Q_{ba}|$, que também dá $V_d = V_{n-d}$.

Fórmula mestra, passo 6: largura igual à variância (1/2)

- Até aqui nada foi suposto sobre ρ_A. Para uma janela de um estado fundamental com gap:

$$V_d = \mathrm{Var}(Q_A) + \mathcal{O}(1) \quad \text{para todo } d \text{ e } n, \qquad \mathrm{Var}(Q_A) = \mathrm{Tr}(\rho Q^2) - (\mathrm{Tr}\rho Q)^2 \propto \ell. \tag{20}$$

- Argumento para um MPS injetivo com tensor de célula B^s, carga de célula m_s e janela de L células. Operador de transferência com fase e seu autovalor dominante $\lambda(u)$:

$$\mathcal{T}_u = \sum_s e^{-ium_s} B^s \otimes \bar{B}^s, \qquad \lambda(0) = 1, \qquad \lambda(-u) = \overline{\lambda(u)}. \tag{21}$$

- Função característica da carga da janela:

$$\log\langle e^{i\alpha Q_A}\rangle = L \log \lambda(-\alpha) + \mathcal{O}(1). \tag{22}$$

- A expansão em cumulantes fixa a expansão de λ:

$$\log\lambda(u) = -i\bar{q}u - \frac{v}{2}u^2 + \mathcal{O}(u^3), \qquad L\bar{q} = \langle Q_A\rangle + \mathcal{O}(1), \qquad Lv = \mathrm{Var}(Q_A) + \mathcal{O}(1). \tag{23}$$

Fórmula mestra, passo 6: largura igual à variância (2/2)

- Em Z_n a fase $e^{iu_r Q}$ age apenas na cópia r. No interior da janela as n cópias se contraem independentemente e a colagem cíclica se reduz a tensores de borda:

$$\log Z_n(\vec{u}) = L \sum_{r=1}^{n} \log \lambda(u_r) + \log \mathcal{B}(\vec{u}) + \mathcal{O}\big(e^{-L/\xi_T}\big). \tag{24}$$

- Com $\sum_r u_r = 0$, a parte extensiva é

$$\log Z_n(\vec{u}) = -\frac{V}{2} \sum_{j=1}^{n} u_j^2 + \ldots, \qquad V = \mathrm{Var}(Q_A) + \mathcal{O}(1), \tag{25}$$

  que é (18) com todos os V_d iguais a V, pois $\sum_{r<r'} u_r u_{r'} = -\frac{1}{2} \sum_r u_r^2$.

- Status: (20) está demonstrada para MPS injetivos (todo n e d) e para estados gaussianos fermiônicos ($n = 2$). Para o estado fundamental da XYZ ela se apoia na aproximação por MPS injetivos de dimensão de ligação finita.

Fórmula mestra, passo 7: integral gaussiana sobre n ângulos (1/2)

- Faixa de ângulos: como $V \propto \ell$, Z_n se concentra em $|u_j| \lesssim \ell^{-1/2}$ em torno de $u_j \in 2\pi\mathbb{Z}$, onde os termos além de (25) mudam a integral por um fator relativo $\mathcal{O}(1/\ell)$. Longe desses pontos Z_n é exponencialmente pequeno em ℓ.
- Mudança de variáveis $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to (u_1, \ldots, u_{n-1}, \alpha_n)$: linear, com entradas inteiras e determinante 1, leva o toro nele mesmo com jacobiano 1. O integrando não depende de α_n: fator 2π.
- Com $u_n = -\sum_{j<n} u_j$:

$$\sum_{j=1}^{n} u_j^2 = \sum_{j<n} u_j^2 + \Big(\sum_{j<n} u_j\Big)^2 = \vec{u}^{\,\mathsf{T}} \big(\mathbf{1} + \vec{e}\vec{e}^{\,\mathsf{T}}\big)\vec{u}, \qquad \vec{e} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{26}$$

- A matriz $\mathbf{1} + \vec{e}\vec{e}^{\,\mathsf{T}}$ tem autovalor n ao longo de $\vec{e}$ e 1 nas $n-2$ direções ortogonais:

$$\det\big(\mathbf{1} + \vec{e}\vec{e}^{\,\mathsf{T}}\big) = n. \tag{27}$$

Fórmula mestra, passo 7: integral gaussiana sobre n ângulos (2/2)

- Estendendo as integrais em u_j à reta real (erro exponencialmente pequeno em V), (11) e (25) dão

$$\frac{\mathrm{Tr}\rho_{A,Q}^n}{\mathrm{Tr}\rho_A^n} = \frac{2\pi}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{d}^{n-1}u e^{-\frac{V}{2}\vec{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{1}+\vec{e}\vec{e}^{\mathrm{T}})\vec{u}} = \frac{2\pi}{(2\pi)^n}\frac{(2\pi/V)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} = \frac{(2\pi V)^{-\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}. \tag{28}$$

- Inserindo em (3):

$$\Delta S_A^{(n)} = \frac{1}{2}\log(2\pi V) + \frac{\log n}{2(n-1)} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\ell}\Big). \tag{29}$$

- Verificação em $n = 2$, com $Z_2(\alpha) = 1 - V\alpha^2 + \ldots$:

$$\Delta S_A^{(2)} = -\log\int \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} e^{-V\alpha^2} = \frac{1}{2}\log(4\pi V). \tag{30}$$

Fórmula mestra, passo 8: variância da carga da janela

- Correlação conexa $C(r) = \langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle - \langle \sigma_0^z \rangle \langle \sigma_r^z \rangle$, com invariância por translação:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Q_A) &= \frac{1}{4} \sum_{i,j \in A} C(i-j) = \frac{1}{4} \sum_{|r|<\ell} (\ell - |r|) C(r) \\ &= \frac{\ell}{4} \sum_{r \in \mathbb{Z}} C(r) - \frac{1}{4} \sum_{|r|<\ell} |r| C(r) - \frac{\ell}{4} \sum_{|r| \geq \ell} C(r). \end{aligned} \tag{31}$$

- Com gap, $|C(r)| \leq c e^{-|r|/\xi}$: o segundo termo é limitado uniformemente em ℓ e o terceiro é exponencialmente pequeno.
- Definição da susceptibilidade:

$$\chi_{zz} = \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} C(r). \tag{32}$$

- Portanto

$$\mathrm{Var}(Q_A) = \frac{\ell}{2} \chi_{zz} + \mathcal{O}(1). \tag{33}$$

Fórmula mestra, passo 9: resultado

- De (20) e (33), com χ_{zz} da ordem da massa do kink M:

$$V = \frac{\ell}{2}\chi_{zz}\Big[1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\ell\chi_{zz}}\Big)\Big]. \tag{34}$$

- Inserindo em (29):

$$\Delta S_A^{(n)}(\ell) = \frac{1}{2}\log\big(\pi\ell\chi_{zz}\big) + \frac{\log n}{2(n-1)} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{M\ell}\Big). \tag{35}$$

- Casos particulares (o último usa a continuação do resultado de n inteiro para n real):

$$\Delta S_A^{(2)} = \frac{1}{2}\log\big(2\pi\ell\chi_{zz}\big), \qquad \Delta S_A^{(\infty)} = \frac{1}{2}\log\big(\pi\ell\chi_{zz}\big), \qquad \lim_{n\to 1}\Delta S_A^{(n)} = \frac{1}{2}\log\big(\pi e\ell\chi_{zz}\big). \tag{36}$$

- A derivação usa: carga igual a uma soma de cargas locais com espectro inteiro; $\log Z_n$ extensivo com largura quadrática comum (20); decaimento exponencial das correlações conexas.
- Vale para $\ell \gg 1/M$. Os limites $\ell \to \infty$ e $\gamma \to 0$ não comutam.

◂ Voltar ao slide 37 ▸ Conteúdo

χ_{zz} em sine-Gordon, passo 1: limite de escala

- Para $\gamma \to 0$, com comprimentos em unidades de $1/M$, a cadeia XYZ é descrita pelo modelo de sine-Gordon (unidades $v = 1$):

$$\mathcal{H} = \int \mathrm{d}x \left[4\pi \Pi^2 + \frac{1}{16\pi} (\partial_x \phi)^2 - 2\mu \cos \beta\phi \right], \qquad [\phi(x), \Pi(y)] = i\delta(x-y), \tag{37}$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{\arccos \Delta_z}{\pi}, \qquad \xi_{\mathrm{sG}} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}, \qquad \mu \propto \gamma. \tag{38}$$

- $\cos \beta\phi$ tem dimensão de escala $2\beta^2$. Então μ tem dimensão $2 - 2\beta^2$ e a massa do kink $M \propto \mu^{1/(2-2\beta^2)}$ é a única escala.
- χ_{zz} é uma variância por unidade de comprimento:

$$\chi_{zz} = M\mathfrak{c}(\beta^2) \qquad (\gamma \to 0). \tag{39}$$

χ_{zz} em sine-Gordon, passo 2: a carga e sua derivada temporal

- Rotações em torno de z são translações de ϕ, geradas por $\int \Pi$:

$$Q = \frac{q}{\beta} \int \mathrm{d}x\, \Pi(x). \tag{40}$$

- De $[\Pi(y), e^{i\beta\phi(x)}] = \beta\delta(x-y)e^{i\beta\phi(x)}$:

$$[Q, e^{\pm i\beta\phi}] = \pm q e^{\pm i\beta\phi}, \qquad [Q, \cos\beta\phi] = iq \sin\beta\phi, \qquad [Q, \sin\beta\phi] = -iq\cos\beta\phi. \tag{41}$$

- $e^{i\beta\phi}$ é a imagem de $\sigma_j^+\sigma_{j+1}^+$, que aumenta a carga em duas unidades:

$$q = 2. \tag{42}$$

- Os dois primeiros termos de (37) comutam com Q. O cosseno dá

$$[\mathcal{H}, Q] = 2iq\mu \int \mathrm{d}x \sin\beta\phi, \qquad \dot{Q} = i[\mathcal{H}, Q] = -2q\mu \int \mathrm{d}x \sin\beta\phi. \tag{43}$$

χ_{zz} em sine-Gordon, passo 3: regra de soma

- Sistema de comprimento L, $\mathcal{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, $E_0 = 0$. Inserindo $\sum_n |n\rangle\langle n|$ na variância da carga total:

$$\mathrm{Var}(Q) = \sum_{n\neq 0} |\langle n|Q|0\rangle|^2. \tag{44}$$

- Elemento de matriz de $\dot{Q} = i[\mathcal{H}, Q]$:

$$\langle n|\dot{Q}|0\rangle = iE_n\langle n|Q|0\rangle. \tag{45}$$

- Com $\mathrm{Var}(Q) = \frac{L}{2}\chi_{zz}$, que é (33) com $\ell \to L$, e com (43):

$$\chi_{zz} = \frac{2}{L}\sum_{n\neq 0}\frac{|\langle n|\dot{Q}|0\rangle|^2}{E_n^2} = \frac{8q^2\mu^2}{L}\sum_{n\neq 0}\frac{\left|\langle n|\int \mathrm{d}x \sin\beta\phi|0\rangle\right|^2}{E_n^2}. \tag{46}$$

- Todos os termos são não negativos.
- O limite $L \to \infty$ é tomado primeiro, com o conteúdo de partículas de $|n\rangle$ fixo.

χ_{zz} em sine-Gordon, passo 4: estados intermediários

- $\mathcal{H}$ é par e $\sin\beta\phi$ é ímpar sob $C : \phi \to -\phi$. Só estados C-ímpares contribuem para (46):
  - o primeiro breather B_1 em repouso, $E = m_{B_1} = 2M \sin\frac{\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2}$, presente para $\xi_{\mathrm{sG}} < 1$;
  - pares kink–antikink na combinação C-ímpar, $E \geq 2M$;
  - três ou mais partículas, $E \geq E_{\mathrm{th}}$, com $E_{\mathrm{th}} = 2M + m_{B_1}$ para $\xi_{\mathrm{sG}} < 1$ e $E_{\mathrm{th}} = 4M$ para $\xi_{\mathrm{sG}} > 1$.
- Decomposição correspondente:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_{2\mathrm{k}} + \mathfrak{c}_{B_1}\Theta(1 - \xi_{\mathrm{sG}}) + \mathfrak{c}_{\mathrm{cauda}}, \qquad \mathfrak{c}_{\mathrm{cauda}} \geq 0. \tag{47}$$

- Rapidezes e normalização dos estados:

$$E = m\cosh\theta, \qquad p = m\sinh\theta, \qquad \langle\theta|\theta'\rangle = 4\pi\delta(\theta - \theta'), \qquad 2\pi\delta(p)\Big|_{p=0} = L. \tag{48}$$

χ_{zz} em sine-Gordon, passo 5: canal de dois kinks (1/3)

- Insumo da literatura: fator de forma de dois kinks, C-ímpar, de $\sin\beta\phi$ (Lukyanov 1997; Lukyanov e Zamolodchikov 1997):

$$\langle\theta_1\theta_2|\sin\beta\phi(0)|0\rangle = F^{\sin}(\theta_1-\theta_2), \qquad F^{\sin}(\theta) = \frac{M^2}{2\mu\beta^2}\cosh\frac{\theta}{2}\mathcal{F}(\theta), \tag{49}$$

$$\mathcal{F}(\theta) = \frac{\sinh\frac{\theta}{2}\,e^{\mathcal{J}(\theta)}}{\cosh\frac{\theta+i\pi}{2\xi_{\mathrm{sG}}}}, \qquad \mathcal{J}(\theta) = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t}\,\frac{k_0(t)}{\sinh t}\,\sin^2\frac{t(i\pi+\theta)}{2\pi}, \tag{50}$$

$$k_0(t) = \frac{\sinh\frac{(\xi_{\mathrm{sG}}-1)t}{2}}{\sinh\frac{\xi_{\mathrm{sG}}t}{2}\cosh\frac{t}{2}}. \tag{51}$$

- Momento e energia do par: $P = M(\sinh\theta_1+\sinh\theta_2)$, $E = M(\cosh\theta_1+\cosh\theta_2)$.

χ_{zz} em sine-Gordon, passo 5: canal de dois kinks (2/3)

- Invariância por translação:

$$\langle\theta_1\theta_2|\int \mathrm{d}x\,\sin\beta\phi|0\rangle = 2\pi\delta(P)F^{\sin}(\theta_1-\theta_2), \qquad [2\pi\delta(P)]^2 = 2\pi L\delta(P). \tag{52}$$

- Inserir em (46) com $\sum_n \to \int \frac{\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_2}{(4\pi)^2}$:

$$\chi_{2\mathrm{k}} = \frac{q^2\mu^2}{\pi}\int \mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_2\,\delta(P)\frac{|F^{\sin}(\theta_1-\theta_2)|^2}{E^2}. \tag{53}$$

- Mudança de variáveis $\theta_1 = \theta_+ + \theta$, $\theta_2 = \theta_+ - \theta$:

$$\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_2 = 2\,\mathrm{d}\theta_+\,\mathrm{d}\theta, \qquad P = 2M\sinh\theta_+\cosh\theta, \qquad \delta(P) = \frac{\delta(\theta_+)}{2M\cosh\theta}, \qquad E\big|_{\theta_+=0} = 2M\cosh\theta. \tag{54}$$

- Integrando em θ_+:

$$\chi_{2\mathrm{k}} = \frac{q^2\mu^2}{4\pi M^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\theta\frac{|F^{\sin}(2\theta)|^2}{\cosh^3\theta}. \tag{55}$$

χ_{zz} em sine-Gordon, passo 5: canal de dois kinks (3/3)

- De (49):

$$|F^{\sin}(2\theta)|^2 = \frac{M^4}{4\mu^2\beta^4}\cosh^2\theta|\mathcal{F}(2\theta)|^2. \tag{56}$$

- Em (55) o acoplamento μ se cancela. Com $q = 2$ e $\frac{1}{\beta^2} = \frac{1+\xi_{\mathrm{sG}}}{\xi_{\mathrm{sG}}}$:

$$\mathfrak{c}_{2\mathrm{k}} = \frac{\chi_{2\mathrm{k}}}{M} = \frac{q^2}{16\pi\beta^4}J_1 = \frac{(1+\xi_{\mathrm{sG}})^2}{4\pi\xi_{\mathrm{sG}}^2}J_1, \qquad J_k \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\theta\,\frac{|\mathcal{F}(2\theta)|^2}{\cosh^k\theta}. \tag{57}$$

- Para calcular J_k, de (50) com u real:

$$|\mathcal{F}(u)|^2 = \frac{\sinh^2\frac{u}{2}e^{2\,\mathrm{Re}\,\mathcal{J}(u)}}{\sinh^2\frac{u}{2\xi_{\mathrm{sG}}} + \cos^2\frac{\pi}{2\xi_{\mathrm{sG}}}}, \qquad \mathrm{Re}\,\mathcal{J}(u) = -\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}k_0(t)\frac{1-\cosh t\cos\frac{tu}{\pi}}{2\sinh t}. \tag{58}$$

χ_{zz} em sine-Gordon, passo 6: valor esperado do cosseno

- O fator de forma do breather é normalizado por $\mathcal{G}_\beta = \langle \cos \beta\phi \rangle$. Seja f a densidade de energia do estado fundamental.
- Hellmann–Feynman e análise dimensional:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = -2\mathcal{G}_\beta, \qquad f \propto M^2 \propto \mu^{\frac{1}{1-\beta^2}} \quad \Longrightarrow \quad \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} = \frac{f}{1-\beta^2}. \tag{59}$$

- Insumo da literatura: densidade de energia (Al. Zamolodchikov 1995):

$$f = -\frac{M^2}{4} \tan \frac{\pi \xi_{\mathrm{sG}}}{2}. \tag{60}$$

- Com $\frac{1}{1-\beta^2} = \frac{\xi_{\mathrm{sG}}}{\beta^2}$:

$$\mathcal{G}_\beta = -\frac{f}{2(1-\beta^2)\mu} = \frac{M^2 \xi_{\mathrm{sG}}}{8\mu\beta^2} \tan \frac{\pi \xi_{\mathrm{sG}}}{2}. \tag{61}$$

χ_{zz} em sine-Gordon, passo 7: canal do breather, $\xi_{\mathrm{sG}} < 1$ (1/2)

- Uma partícula de massa m_{B_1}: $\sum_n \to \int \frac{\mathrm{d}\theta}{4\pi}$, $\delta(p) = \delta(\theta)/m_{B_1}$, $E = m_{B_1}$. De (46):

$$\chi_{B_1} = \frac{(2q\mu)^2 |F_{B_1}^{\mathrm{sin}}|^2}{m_{B_1}^3}. \tag{62}$$

- Insumo da literatura: elemento de matriz de um breather (Lukyanov 1997):

$$F_{B_1}^{\mathrm{sin}} = \sqrt{2}\lambda(\xi_{\mathrm{sG}})\mathcal{G}_\beta, \qquad \lambda(\xi_{\mathrm{sG}}) = 2\cos\frac{\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2}\sqrt{2\sin\frac{\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2}}\exp\Big(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi\xi_{\mathrm{sG}}}\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sin t}\Big). \tag{63}$$

- Inserir (63), (61) e $m_{B_1} = 2M\sin\frac{\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2}$ em (62). Os fatores trigonométricos e μ se cancelam:

$$\mathfrak{c}_{B_1} = \frac{\chi_{B_1}}{M} = \frac{q^2\xi_{\mathrm{sG}}^2}{8\beta^4}\exp\Big(-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi\xi_{\mathrm{sG}}}\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sin t}\Big) = \frac{(1+\xi_{\mathrm{sG}})^2}{2}\exp\Big(-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi\xi_{\mathrm{sG}}}\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sin t}\Big). \tag{64}$$

χ_{zz} em sine-Gordon, passo 7: canal do breather, $\xi_{\mathrm{sG}} < 1$ (2/2)

- Função de Clausen e a integral de (64):

$$\mathrm{Cl}_2(x) = -\int_0^x \log\left|2\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t, \qquad \int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sin t} = x\log\tan\frac{x}{2} + 2\mathrm{Cl}_2(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Cl}_2(2x). \tag{65}$$

- Forma fechada:

$$\mathfrak{c}_{B_1} = \frac{(1+\xi_{\mathrm{sG}})^2}{2}\left(\tan\frac{\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2}\right)^{-\xi_{\mathrm{sG}}} \exp\left[\frac{\mathrm{Cl}_2(2\pi\xi_{\mathrm{sG}}) - 4\mathrm{Cl}_2(\pi\xi_{\mathrm{sG}})}{2\pi}\right]. \tag{66}$$

- Limites:

$$\mathfrak{c}_{B_1} \to \frac{1}{2} \quad (\xi_{\mathrm{sG}} \to 0), \qquad \mathfrak{c}_{B_1} \simeq \pi(1-\xi_{\mathrm{sG}}) \quad (\xi_{\mathrm{sG}} \to 1^-). \tag{67}$$

χ_{zz} em sine-Gordon, passo 8: cota inferior e ponto de férmions livres

- Positividade de (46) e a decomposição (47):

$$\mathfrak{c}(\beta^2) \geq \mathfrak{c}_{2\mathrm{k}}(\xi_{\mathrm{sG}}) + \mathfrak{c}_{B_1}(\xi_{\mathrm{sG}})\Theta(1-\xi_{\mathrm{sG}}). \tag{68}$$

- Em $\xi_{\mathrm{sG}} = 1$ ($\Delta_z = 0$): $k_0 \equiv 0$, $\mathcal{J} \equiv 0$ e $\cosh\frac{\theta+i\pi}{2} = i\sinh\frac{\theta}{2}$, logo $|\mathcal{F}|^2 = 1$ e

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cosh\theta} = \pi, \qquad \mathfrak{c}_{2\mathrm{k}} = 1, \qquad \mathfrak{c}_{B_1} = 0. \tag{69}$$

- A cadeia XY, resolvida na rede por férmions livres, dá $\chi_{zz} = \frac{\gamma}{1+\gamma}$ e $M = \operatorname{atanh}\gamma$:

$$\mathfrak{c}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \lim_{\gamma\to 0} \frac{\chi_{zz}}{M} = 1. \tag{70}$$

- A cota (68) é saturada nesse ponto, $\mathfrak{c}_{\mathrm{cauda}} = 0$. A comparação também fixa a normalização global do canal de dois kinks.

χ_{zz} em sine-Gordon, passo 9: a cauda, momento T_{-1}

- Momentos do mesmo peso espectral:

$$T_j = \frac{2}{L}\sum_{n\neq 0} E_n^j |\langle n|Q|0\rangle|^2, \qquad T_0 = \chi_{zz}. \tag{71}$$

- Campo uniforme, $\mathcal{H}(h) = \mathcal{H} - hQ$. Completando o quadrado:

$$4\pi\Pi^2 - \frac{hq}{\beta}\Pi = 4\pi\left(\Pi - \frac{hq}{8\pi\beta}\right)^2 - \frac{h^2q^2}{16\pi\beta^2}. \tag{72}$$

- Um deslocamento constante de Π é uma transformação unitária que comuta com os termos que dependem só de ϕ:

$$E_0(h) = E_0(0) - \frac{h^2q^2}{16\pi\beta^2}L. \tag{73}$$

- Teoria de perturbação de segunda ordem, $E_0(h) = E_0(0) - h^2\sum_{n\neq 0}|\langle n|Q|0\rangle|^2/E_n + \ldots$:

$$T_{-1} = \frac{q^2}{8\pi\beta^2} = \frac{1+\xi_{\mathrm{sG}}}{2\pi\xi_{\mathrm{sG}}}. \tag{74}$$

- Com $E_0 = 0$:

$$\frac{1}{2}\langle 0|[Q,[\mathcal{H},Q]]|0\rangle = \sum_n E_n |\langle n|Q|0\rangle|^2. \tag{75}$$

- De (43) e (41):

$$[Q,[\mathcal{H},Q]] = 2q^2\mu \int \mathrm{d}x \cos\beta\phi. \tag{76}$$

- Com (61):

$$T_{+1} = 2q^2\mu\mathcal{G}_\beta = M^2(1+\xi_{\mathrm{sG}})\tan\frac{\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2} \qquad (\xi_{\mathrm{sG}} < 1). \tag{77}$$

- Para $\xi_{\mathrm{sG}} \geq 1$ essa soma diverge em altas energias.
- Contribuição dos dois canais aos momentos, pelos mesmos passos com um fator extra E^j:

$$T_j^{2\mathrm{k}} = M^{1+j}\frac{(1+\xi_{\mathrm{sG}})^2}{4\pi\xi_{\mathrm{sG}}^2}2^j J_{1-j}, \qquad T_j^{B_1} = M\mathfrak{c}_{B_1} m_{B_1}^j. \tag{78}$$

χ_{zz} em sine-Gordon, passo 9: a cauda, corredor

- Subtraindo (78) de (71) resta uma medida positiva $\mathrm{d}\sigma(E)$ em $E \geq E_{\mathrm{th}}$ (sem os termos com $\mathfrak{c}_{B_1}$ para $\xi_{\mathrm{sG}} > 1$):

$$\int \frac{\mathrm{d}\sigma}{E} = r_{-1}, \qquad \int \mathrm{d}\sigma = M\mathfrak{c}_{\mathrm{cauda}}, \qquad \int E\,\mathrm{d}\sigma = M^2 r_{+1}, \tag{79}$$

$$r_{-1} = \frac{1+\xi_{\mathrm{sG}}}{2\pi\xi_{\mathrm{sG}}} - \frac{(1+\xi_{\mathrm{sG}})^2}{8\pi\xi_{\mathrm{sG}}^2} J_2 - \frac{\mathfrak{c}_{B_1}}{2\sin\frac{\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2}}, \tag{80}$$

$$r_{+1} = (1+\xi_{\mathrm{sG}})\tan\frac{\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2} - \frac{(1+\xi_{\mathrm{sG}})^2}{2\pi\xi_{\mathrm{sG}}^2} J_0 - 2\mathfrak{c}_{B_1}\sin\frac{\pi\xi_{\mathrm{sG}}}{2}. \tag{81}$$

- Suporte em $E \geq E_{\mathrm{th}}$ e desigualdade de Cauchy–Schwarz, com E_{th} em unidades de M em (83):

$$\int \mathrm{d}\sigma \geq E_{\mathrm{th}} \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{E}, \qquad \left(\int \mathrm{d}\sigma\right)^2 \leq \int E\,\mathrm{d}\sigma \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{E}. \tag{82}$$

$$E_{\mathrm{th}} r_{-1} \leq \mathfrak{c}_{\mathrm{cauda}} \leq \sqrt{r_{+1} r_{-1}} \quad (\xi_{\mathrm{sG}} < 1), \qquad \mathfrak{c}_{\mathrm{cauda}} \geq 4 r_{-1} \quad (\xi_{\mathrm{sG}} > 1). \tag{83}$$

χ_{zz} em sine-Gordon, passo 10: resultado

- Susceptibilidade, com $\mathfrak{c}_{2\mathrm{k}}$ de (57), $\mathfrak{c}_{B_1}$ de (66) e $\mathfrak{c}_{\mathrm{cauda}}$ limitado por (83):

$$\chi_{zz} = M\Big[\mathfrak{c}_{2\mathrm{k}} + \mathfrak{c}_{B_1}\Theta(1-\xi_{\mathrm{sG}}) + \mathfrak{c}_{\mathrm{cauda}}\Big]. \tag{84}$$

- Inserindo na fórmula mestra (35):

$$\Delta S_A^{(n)}(\ell) = \frac{1}{2}\log\left(\pi\ell M\mathfrak{c}(\beta^2)\right) + \frac{\log n}{2(n-1)} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{M\ell}\Big). \tag{85}$$

- $\mathfrak{c}_{2\mathrm{k}}$ e $\mathfrak{c}_{B_1}$ são expressões fechadas, dados os fatores de forma e a densidade de energia da literatura. A soma dos dois é uma cota inferior para $\mathfrak{c}$.
- $\mathfrak{c}_{\mathrm{cauda}}$ é limitado dos dois lados para $\xi_{\mathrm{sG}} < 1$ e só por baixo para $\xi_{\mathrm{sG}} > 1$. Seu valor não é determinado por este cálculo, salvo em $\xi_{\mathrm{sG}} = 1$, onde se anula.
- (39) vale para $\gamma \to 0$; para γ finito há correções de rede. A massa $M(\gamma, \Delta_z)$ vem da solução da cadeia XYZ na rede e não é derivada aqui.

χ_{zz} em sine-Gordon: referências dos insumos

- S. Lukyanov, Form factors of exponential fields in the sine-Gordon model, Mod. Phys. Lett. A **12**, 2543 (1997).
- S. Lukyanov and A. Zamolodchikov, Exact expectation values of local fields in the quantum sine-Gordon model, Nucl. Phys. B **493**, 571 (1997).
- Al. B. Zamolodchikov, Mass scale in the sine-Gordon model and its reductions, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 1125 (1995).

◂ Voltar ao slide 39 ▸ Conteúdo

Apêndice E — Perspectivas e glossário

O que é geral, o que é específico, o que está em aberto

Geral

Fórmula mestra: toda cadeia 1D com gap e carga $U(1)$ quebrada explicitamente, com χ sua susceptibilidade. Regra de soma + corredor de Cauchy–Schwarz: toda teoria com gap e $\dot{Q}$ local.

Específico

Formas fechadas dos momentos (carga bosonizada, EDM de sine-Gordon); fatores de forma de dois kinks e de B_1; massa da rede pela integrabilidade da XYZ.

Em aberto

- Ressomar a cauda de quatro kinks.
- Regra de soma f repulsiva $\xi_{\mathrm{sG}} > 1$.
- O regime Néel, $\Delta_z > 1$.
- Campos; quenches.

Um tema recorrente: o ponto de férmions livres

Em $\beta^2 = \frac{1}{2}$ o operador de quebra satura uma cota tipo Seiberg: a integral do valor de vácuo diverge para $\xi_{\mathrm{sG}} \geq 1$, a regra de soma f diverge, a margem de crescimento do fator de forma fecha, e a fonte vira uma massa de Dirac livre que desliga os canais de ≥ 3 partículas.

Qual a conexão com informação e computação quânticas?

Um computador quântico é um sistema quântico de muitos corpos controlável.

- **Spins são qubits.** Uma cadeia de N spins-$\frac{1}{2}$ e um registrador de N qubits têm o mesmo espaço de Hilbert, de dimensão 2^N: basta ler $|\uparrow\rangle = |0\rangle$ e $|\downarrow\rangle = |1\rangle$.
- **Interações são portas lógicas.** Ligar a interação entre dois spins vizinhos por um tempo t gera uma porta de dois qubits: Ising $\rightarrow$ CZ, XY $\rightarrow$ iSWAP, Heisenberg $\rightarrow$ SWAP. É assim que o hardware cria emaranhamento.
- **Computadores são simuladores.** A evolução e^{-iHt} de uma cadeia pode ser quebrada em portas (simulação digital) ou imitada diretamente por íons e átomos frios (simulação analógica).
- **Emaranhamento mede o custo clássico.** Estados com lei de área, como o estado fundamental com gap, são baratos no computador clássico (MPS, DMRG). Uma dinâmica genérica gera emaranhamento demais: aí o computador quântico pode ajudar.
- **Estados de muitos corpos são recursos.** Com estados *cluster* se computa só medindo; a ordem topológica (código de superfície) protege a informação contra erros locais.
- **Modelos solúveis testam o hardware.** XXZ e XYZ têm resultados analíticos exatos, que servem de gabarito para verificar se a máquina está correta.

Glossário (1/2)

- **Gap**: energia da excitação mais barata acima do estado fundamental num sistema infinito.
- **Com gap**: gap > 0; correlações decaem exponencialmente, com comprimento de correlação ξ.
- **Crítico**: sem gap; correlações decaem como leis de potência.
- **Simetria**: unitária U com $[H, U] = 0$; as contínuas têm um gerador (carga) Q.
- **Quebra explícita**: um termo de H viola a simetria (γ aqui).
- **Quebra espontânea**: H é simétrico mas o estado não (vácuos Néel-x).
- **Vácuo**: um dos estados fundamentais degenerados que satisfazem cluster.
- **Kink**: parede de domínio entre dois vácuos; partícula de massa M; topológico.
- **Breather**: estado ligado kink–antikink ($\Delta_z < 0$).

- ρ_A: matriz densidade reduzida da janela A (traço parcial).
- **Entropia de Rényi**: $\frac{1}{1-n} \log \mathrm{Tr} \rho^n$.
- **Assimetria**: entropia ganha ao apagar as coerências entre setores de carga.
- **Momento carregado**: Z_n: traço de ρ_A's intercalados com rotações.
- **Réplica**: uma das n cópias de ρ_A em $\mathrm{Tr} \rho^n$.
- χ_{zz}: $\frac{1}{2} \sum_r \langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_c$; $\mathrm{Var}(Q_A) \simeq \ell \chi_{zz}/2$.
- **Limite de escala**: $\gamma \to 0$ com $M\ell$ fixo; descrito por uma teoria de campos.

Glossário (2/2)

- **Sine-Gordon**: $\frac{1}{16\pi}(\partial\phi)^2 - 2\mu\cos\beta\phi$; o limite do contínuo aqui.
- β^2, ξ_{sG}: $1 - \arccos(\Delta_z)/\pi$; $\beta^2/(1-\beta^2)$.
- **Rapidez**: $E = M\cosh\theta$, $p = M\sinh\theta$.
- **Integrável**: infinitas leis de conservação; espalhamento elástico fatorizado.
- **Fator de forma**: elemento de matriz $\langle 0|\mathcal{O}|\theta_1\cdots\theta_k\rangle$.
- **Regra de soma**: identidade que escreve uma quantidade estática como soma sobre estados excitados.
- **Fator CDD**: solução trivial das equações de fator de forma; excluída aqui.
- **Valores de Schmidt**: valores singulares do estado através de um corte.
- **MPS**: produto de matrizes por sítio; dimensão de ligação χ.
- **Injetivo**: MPS cuja matriz de transferência tem autovalor dominante único.
- **Matriz de transferência**: $\sum_s B^s \otimes \bar{B}^s$; governa todas as correlações.
- **Umklapp**: operador de rede ausente em sine-Gordon; correção γ^s.

Glossário (3/3): o vocabulário das Partes 1–3

- **Qubit**: sistema quântico de dois níveis; aqui um spin-$\frac{1}{2}$.
- **Superposição**: $a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$; resultados aleatórios com probabilidades $|a|^2$, $|b|^2$.
- **Estado produto**: cada parte tem seu próprio estado; $S_A = 0$.
- **Emaranhado**: não é estado produto; as partes não têm vetor de estado próprio.
- **Par de Bell**: par de qubits maximamente emaranhado; $S_A = \log 2$ (um ebit).
- **Matriz densidade**: ρ: descreve estados mistos; $\mathrm{Tr}\rho = 1$.
- **Decomposição de Schmidt**: $\sum_a \lambda_a |u_a\rangle|v_a\rangle$; $\lambda_a^2 =$ autovalores de ρ_A.
- **Lei de área**: S_A limitado quando ℓ cresce (estados fundamentais com gap).
- **Carga central**: o c em $\frac{c}{3}\log \ell$ num ponto crítico.
- **Troca**: interação que alinha (ferro) ou anti-alinha (antiferro) spins vizinhos.
- **Anisotropia**: acoplamentos diferentes em eixos diferentes (γ, Δ_z).
- **Quasipartícula**: excitação coletiva que se comporta como partícula de energia $\varepsilon(p)$.
- **Comprimento de correlação**: ξ: distância em que as correlações sobrevivem; $\xi \sim v/\Delta$.
- **Ordem de Néel**: padrão antiferromagnético $\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow$; parâmetro de ordem: magnetização alternada.
- **Parâmetro de ordem**: quantidade nula na fase simétrica e não nula na quebrada.
- **Topológico**: não pode ser removido por nenhuma mudança local (kinks).
- **Twirl**: média sobre todas as operações de simetria; apaga as coerências entre setores.