Aula 7 — Como as derivadas afetam a forma de um gráfico

14/10/2026 · Stewart, *Cálculo*, vol. 1, Seções 2.8 e 4.3

Nesta aula revisamos brevemente as derivadas de ordem superior, em especial a segunda derivada e suas interpretações como taxa de variação da inclinação e como aceleração. Em seguida estudamos o que os sinais de f' e de f'' dizem sobre a forma do gráfico de f: onde a função cresce ou decresce (Teste Crescente/Decrescente), como classificar seus números críticos (Teste da Primeira Derivada), onde o gráfico é côncavo para cima ou para baixo (Teste da Concavidade), o que são pontos de inflexão e como a segunda derivada também permite reconhecer máximos e mínimos locais (Teste da Segunda Derivada). Terminamos usando todas essas informações para esboçar gráficos.

2.8 Derivadas de Ordem Superior (revisão)

Se f for uma função derivável, então sua derivada f' também é uma função, de modo que f' pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$. Essa nova função f'' é chamada *segunda derivada* (ou derivada de ordem dois) de f. Na notação de Leibniz, a segunda derivada de $y = f(x)$ é

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Exemplo 6. Se $f(x) = x^3 - x$, encontre e interprete $f''(x)$.

Solução. No Exemplo 2 da Seção 2.8 encontramos a primeira derivada $f'(x) = 3x^2 - 1$. Assim, a segunda derivada é

$$\begin{aligned} f''(x) = (f')'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[3(x+h)^2 - 1\right] - \left[3x^2 - 1\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h} = \lim_{h\to 0} (6x + 3h) = 6x. \end{aligned}$$

Os gráficos de f, f' e f'' estão na Figura 1. Podemos interpretar $f''(x)$ como a inclinação da curva $y = f'(x)$ no ponto $(x, f'(x))$; em outras palavras, é a taxa de variação da inclinação da curva original $y = f(x)$. Observe na figura que $f''(x)$ é negativa quando $y = f'(x)$ tem inclinação negativa e positiva quando $y = f'(x)$ tem inclinação positiva. Assim, os gráficos servem como verificação dos cálculos. ■

Em geral, podemos interpretar a segunda derivada como uma *taxa de variação de uma taxa de variação*. O exemplo mais familiar é a *aceleração*. Se $s = s(t)$ é a função posição de um objeto que se move em uma reta, sua primeira derivada é a velocidade:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}.$$

A taxa instantânea de variação da velocidade em relação ao tempo é a *aceleração* $a(t)$ do objeto. Assim, a aceleração é a derivada da velocidade e, portanto, a segunda derivada da posição:

$$a(t) = v'(t) = s''(t) \qquad \text{ou, na notação de Leibniz,} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

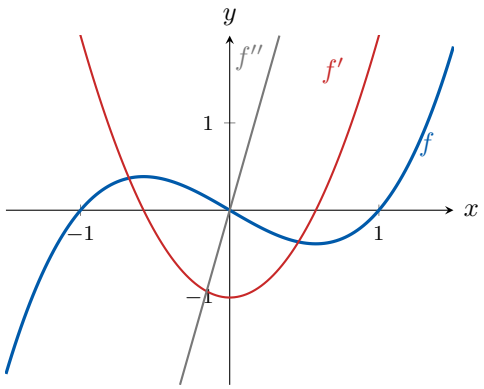


Figura 1: Os gráficos de $f(x) = x^3 - x$, de $f'(x) = 3x^2 - 1$ e de $f''(x) = 6x$.

A *terceira derivada* f''' (ou derivada de terceira ordem) é a derivada da segunda derivada: $f''' = (f'')'$. Assim, $f'''(x)$ pode ser interpretada como a inclinação da curva $y = f''(x)$ ou como a taxa de variação de $f''(x)$. Se $y = f(x)$, as notações alternativas são

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

O processo pode continuar. A quarta derivada f'''' é usualmente denotada por $f^{(4)}$. Em geral, a *n-ésima derivada* de f é denotada por $f^{(n)}$ e é obtida a partir de f derivando n vezes. Se $y = f(x)$, escrevemos

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Exemplo 7. Se $f(x) = x^3 - x$, encontre $f'''(x)$ e $f^{(4)}(x)$.

Solução. No Exemplo 6 encontramos $f''(x) = 6x$. O gráfico da segunda derivada é a reta $y = 6x$, de inclinação 6. Como $f'''(x)$ é a inclinação de $f''(x)$, temos

$$f'''(x) = 6$$

para todo x. Assim, f''' é uma função constante, cujo gráfico é uma reta horizontal. Portanto, para todo x,

$$f^{(4)}(x) = 0.$$ ■

A terceira derivada também tem uma interpretação física. Se $s = s(t)$ é a posição de um objeto que se move ao longo de uma reta, então $s''' = (s'')' = a'$ é a derivada da aceleração, chamada *jerk*:

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}.$$

O jerk é, portanto, a taxa de variação da aceleração (*jerk* significa solavanco, sacudida): um jerk grande indica uma variação súbita na aceleração, o que causa um movimento abrupto em um veículo.

Na Seção 4.3, a seguir, veremos outra aplicação da segunda derivada: o conhecimento de f'' nos dá informação sobre a forma do gráfico de f.

4.3 Como as Derivadas Afetam a Forma de um Gráfico

Muitas aplicações do cálculo dependem de nossa habilidade para deduzir fatos sobre uma função f a partir de informações sobre suas derivadas. Como $f'(x)$ representa a inclinação da curva $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$, ela nos diz para que direção a curva segue em cada ponto. Assim, é razoável esperar que informações sobre $f'(x)$ nos forneçam informações sobre $f(x)$.

O que f' diz sobre f?

Para ver como a derivada de f pode nos dizer onde uma função é crescente ou decrescente, observe a Figura 2. (As funções crescentes e decrescentes foram definidas na Seção 1.1.) Entre A e B e entre C e D, as retas tangentes têm inclinação positiva e, portanto, $f'(x) > 0$. Entre B e C, as retas tangentes têm inclinação negativa e, portanto, $f'(x) < 0$. Assim, parece que f cresce quando $f'(x)$ é positiva e decresce quando $f'(x)$ é negativa. Para demonstrar que isso é sempre válido, vamos usar o Teorema do Valor Médio.

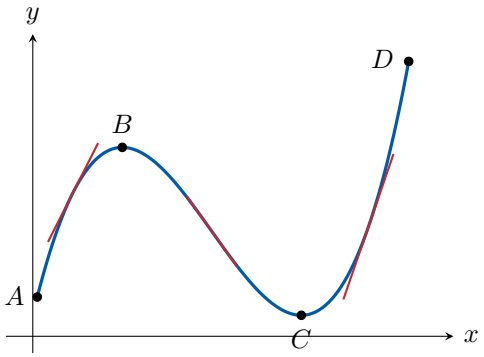


Figura 2: Onde as tangentes têm inclinação positiva, f cresce; onde têm inclinação negativa, f decresce.

Teste Crescente/Decrescente.

(a) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nele.

(b) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nele.

Vamos abreviar o nome deste teste para *Teste C/D*.

Demonstração. (a) Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer no intervalo, com $x_1 < x_2$. Pela definição de função crescente, devemos mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Como $f'(x) > 0$ por hipótese, f é derivável em $[x_1, x_2]$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre x_1 e x_2 tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1). \tag{1}$$

Agora $f'(c) > 0$, por hipótese, e $x_2 - x_1 > 0$, pois $x_1 < x_2$. Assim, o lado direito de (1) é positivo e, portanto,

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x_1) < f(x_2).$$

Isso mostra que f é crescente. A parte (b) é demonstrada de maneira semelhante. ■

Exemplo 1. Encontre onde a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ é crescente e onde ela é decrescente.

Solução. Temos

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1).$$

Para usar o Teste C/D, devemos saber onde $f'(x) > 0$ e onde $f'(x) < 0$. Isso depende dos sinais dos três fatores de $f'(x)$, isto é, $12x$, $x - 2$ e $x + 1$. Dividimos a reta real em intervalos cujas extremidades são os números críticos -1, 0 e 2 e dispomos o trabalho em uma tabela. Um sinal de mais indica que a expressão é positiva, e um sinal de menos, que ela é negativa. A última coluna dá a conclusão baseada no Teste C/D.

Intervalo	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x<-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	decrescente em $(-\infty,-1)$
$-1<x<0$	$-$	$-$	$+$	$+$	crescente em $(-1,0)$
$0<x<2$	$+$	$-$	$+$	$-$	decrescente em $(0,2)$
$x>2$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente em $(2,\infty)$

Por exemplo, $f'(x)<0$ para $0<x<2$, de modo que f é decrescente em $(0,2)$. (Também seria verdade dizer que f é decrescente no intervalo fechado $[0,2]$.) O gráfico de f na Figura 3 confirma a informação da tabela. ■

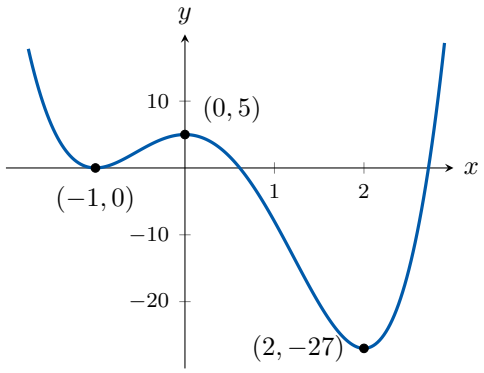


Figura 3: $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$: decrescente em $(-\infty,-1)$ e $(0,2)$, crescente em $(-1,0)$ e $(2,\infty)$.

Da Seção 4.1, lembre-se de que, se f tem um máximo ou mínimo local em c, então c deve ser um número crítico de f (pelo Teorema de Fermat), mas nem todo número crítico dá origem a um máximo ou mínimo. Precisamos, portanto, de um teste que nos diga se f tem ou não um máximo ou mínimo local em um número crítico.

Na Figura 3 vemos que $f(0)=5$ é um valor máximo local de f, pois f cresce em $(-1,0)$ e decresce em $(0,2)$. Em termos de derivadas, $f'(x)>0$ para $-1<x<0$ e $f'(x)<0$ para $0<x<2$. Em outras palavras, o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em 0. Essa observação é a base do teste a seguir.

Teste da Primeira Derivada. *Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.*

(a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

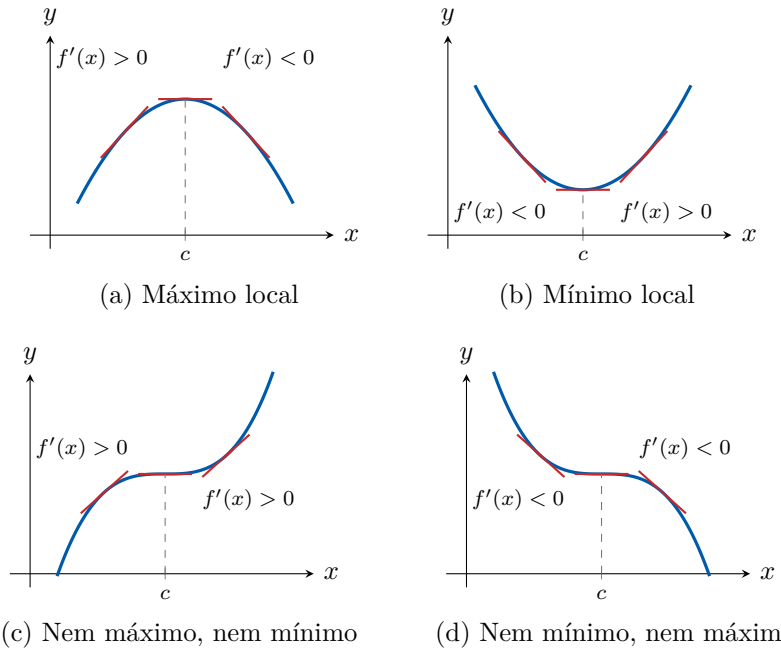
(b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

(c) Se f' não mudar de sinal em c (isto é, se f' for positiva em ambos os lados de c ou negativa em ambos os lados), então f não tem máximo nem mínimo local em c.

O Teste da Primeira Derivada é uma consequência do Teste C/D. Na parte (a), por exemplo, como o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em c, f é crescente à esquerda de c e decrescente à direita de c. A consequência é que f tem um máximo local em c. É fácil memorizar o teste visualizando diagramas como os da Figura 4.

Exemplo 2. Encontre os valores de máximo e mínimo locais da função f do Exemplo 1.

Solução. Pela tabela da solução do Exemplo 1, o sinal de $f'(x)$ muda de negativo para positivo em -1; então $f(-1)=0$ é um valor mínimo local, pelo Teste da Primeira Derivada. Analogamente,



(a) Máximo local (b) Mínimo local

(c) Nem máximo, nem mínimo (d) Nem mínimo, nem máximo

Figura 4: O Teste da Primeira Derivada: o que acontece com o sinal de f' em um número crítico c.

o sinal de f' muda de negativo para positivo em 2; portanto, $f(2) = -27$ também é um valor mínimo local. Como observado anteriormente, $f(0) = 5$ é um valor máximo local, pois o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em 0. ■

Exemplo 3. Encontre os valores de máximo e mínimo locais da função

$$g(x) = x + 2\operatorname{sen} x, \qquad 0 \le x \le 2\pi.$$

Solução. Para achar os números críticos de g, derivamos:

$$g'(x) = 1 + 2\cos x.$$

Logo, $g'(x) = 0$ quando $\cos x = -\frac{1}{2}$, cujas soluções em $(0, 2\pi)$ são $2\pi/3$ e $4\pi/3$. Como g é derivável em toda parte, os únicos números críticos são $2\pi/3$ e $4\pi/3$, e analisamos g na tabela a seguir. (Os sinais vêm do fato de que $g'(x) > 0$ quando $\cos x > -\frac{1}{2}$; pelo gráfico de $y = \cos x$, isso ocorre exatamente nos intervalos indicados com $+$.)

Intervalo	$g'(x) = 1 + 2\cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	$+$	crescente em $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	$-$	decrescente em $(2\pi/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	$+$	crescente em $(4\pi/3, 2\pi)$

Como o sinal de $g'(x)$ muda de positivo para negativo em $2\pi/3$, o Teste da Primeira Derivada nos diz que há um máximo local em $2\pi/3$, e o valor máximo local é

$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3{,}83.$$

Da mesma forma, o sinal de $g'(x)$ muda de negativo para positivo em $4\pi/3$, de modo que

$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2{,}46$$

é um valor mínimo local. O gráfico de g na Figura 5 confirma a conclusão. ■

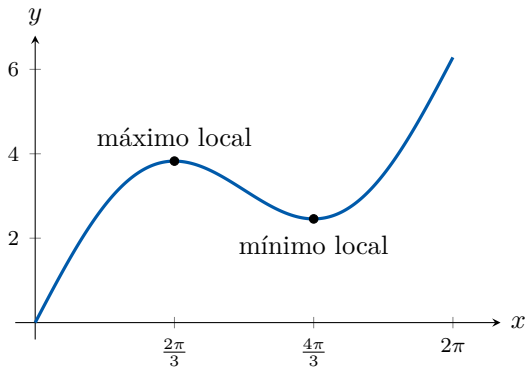
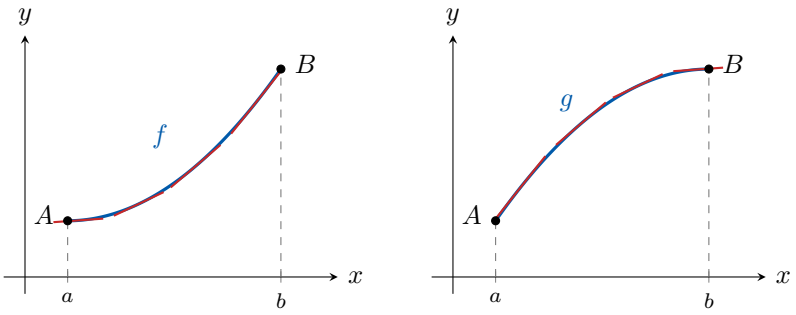


Figura 5: $g(x) = x + 2\,\mathrm{sen}\,x$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

O que f'' diz sobre f?

A Figura 6 mostra os gráficos de duas funções crescentes em (a, b). Ambos os gráficos unem o ponto A ao ponto B, mas eles são diferentes, pois se curvam em direções diferentes. Como distinguir esses dois tipos de comportamento? Na figura, as tangentes às curvas foram traçadas em vários pontos. Em (a), a curva fica acima das tangentes e f é chamada *côncava para cima* em (a, b). Em (b), a curva fica abaixo das tangentes e g é chamada *côncava para baixo* em (a, b).



(a) Côncava para cima (b) Côncava para baixo

Figura 6: Duas funções crescentes em (a, b), com algumas de suas tangentes.

Definição. Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então f é chamada **côncava para cima** em I. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, então f é chamada **côncava para baixo** em I.

A Figura 7 mostra o gráfico de uma função que é côncava para cima (abrevia-se CC) nos intervalos (b, c), (d, e) e (e, p), e côncava para baixo (CB) nos intervalos (a, b), (c, d) e (p, q).

Vejamos como a segunda derivada ajuda a determinar os intervalos de concavidade. Olhando para a Figura 6(a), vemos que, indo da esquerda para a direita, a inclinação da tangente cresce. Isso significa que a derivada f' é uma função crescente e, consequentemente, sua derivada f'' é positiva. Da mesma forma, na Figura 6(b) a inclinação da tangente decresce da esquerda para a direita; logo, g' decresce e, portanto, g'' é negativa. Esse raciocínio pode ser invertido e sugere que o teorema a seguir é verdadeiro. (Uma demonstração, que usa o Teorema do Valor Médio, está no Apêndice F do livro.)

Teste da Concavidade.

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.

(b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

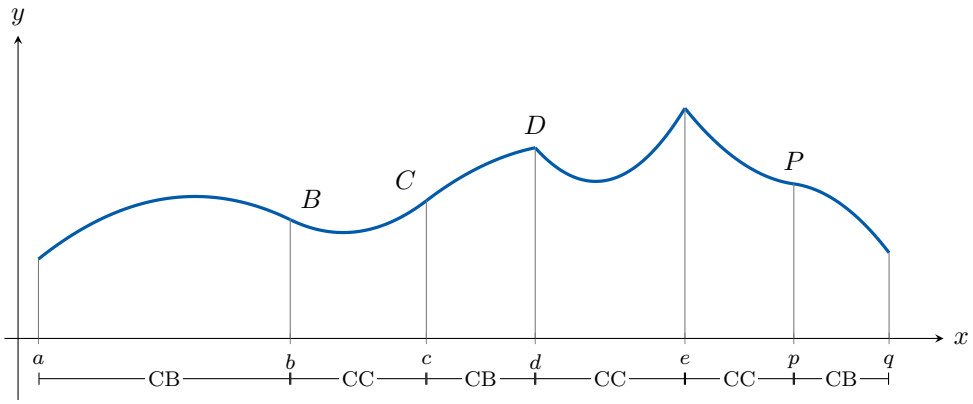


Figura 7: Intervalos de concavidade: CC = côncava para cima, CB = côncava para baixo. Os pontos B, C, D e P são pontos de inflexão.

Exemplo 4. A Figura 8 mostra um gráfico da população de abelhas cipriotas criadas em um apiário. Como cresce a taxa populacional? Quando essa taxa é mais alta? Em que intervalos P é côncava para cima ou côncava para baixo?

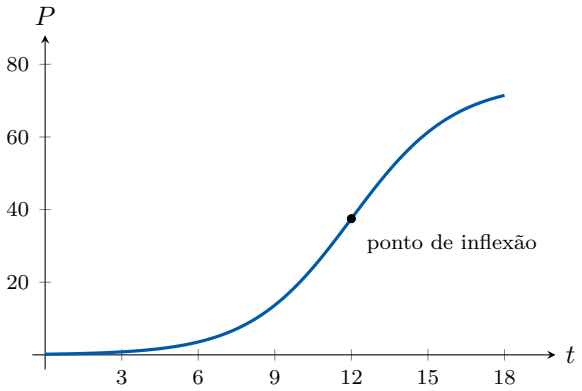


Figura 8: População de abelhas: P é o número de abelhas (em milhares) e t, o tempo (em semanas).

Solução. Examinando a inclinação da curva quando t cresce, vemos que a taxa de crescimento populacional é inicialmente muito pequena, depois se torna maior até atingir um máximo em cerca de $t = 12$ semanas, e decresce à medida que a população se estabiliza. À medida que a população se aproxima de seu valor máximo, de cerca de 75.000 (chamado *capacidade de suporte*), a taxa de crescimento $P'(t)$ tende a 0. A curva parece ser côncava para cima em $(0, 12)$ e côncava para baixo em $(12, 18)$. ■

No Exemplo 4, a curva populacional passa de côncava para cima a côncava para baixo aproximadamente no ponto $(12, 38.000)$. Esse ponto é chamado *ponto de inflexão* da curva. O significado desse ponto é que a taxa de crescimento populacional atinge ali seu valor máximo. Em geral, um ponto de inflexão é aquele em que uma curva muda o sentido de sua concavidade.

Definição. Um ponto P da curva $y = f(x)$ é chamado **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto e a curva muda de côncava para cima para côncava para baixo, ou vice-versa, em P.

Por exemplo, na Figura 7, B, C, D e P são os pontos de inflexão. Observe que, se uma curva tiver uma tangente em um ponto de inflexão, então a curva cruza sua tangente nesse ponto.

Em vista do Teste da Concavidade, há um ponto de inflexão sempre que a segunda derivada mudar de sinal (em um ponto em que f é contínua).

Exemplo 5. Esboce um gráfico possível de uma função f que satisfaça as seguintes condições:

(i) $f'(x) > 0$ em $(-\infty, 1)$, $\quad f'(x) < 0$ em $(1, \infty)$;

(ii) $f''(x) > 0$ em $(-\infty, -2)$ e $(2, \infty)$, $\quad f''(x) < 0$ em $(-2, 2)$;

(iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Solução. A condição (i) nos diz que f cresce em $(-\infty, 1)$ e decresce em $(1, \infty)$. A condição (ii) diz que f é côncava para cima em $(-\infty, -2)$ e $(2, \infty)$ e côncava para baixo em $(-2, 2)$. Pela condição (iii), o gráfico de f tem duas assíntotas horizontais: $y = -2$ e $y = 0$.

Primeiro, traçamos a assíntota horizontal $y = -2$ como uma linha tracejada (veja a Figura 9). Então fazemos o gráfico de f tendendo a essa assíntota no extremo esquerdo, crescente até seu máximo no ponto $x = 1$ e decrescente em direção ao eixo x no extremo direito. Também garantimos que o gráfico tenha pontos de inflexão em $x = -2$ e $x = 2$: a curva é encurvada para cima para $x < -2$ e $x > 2$, e para baixo quando x está entre -2 e 2. ■

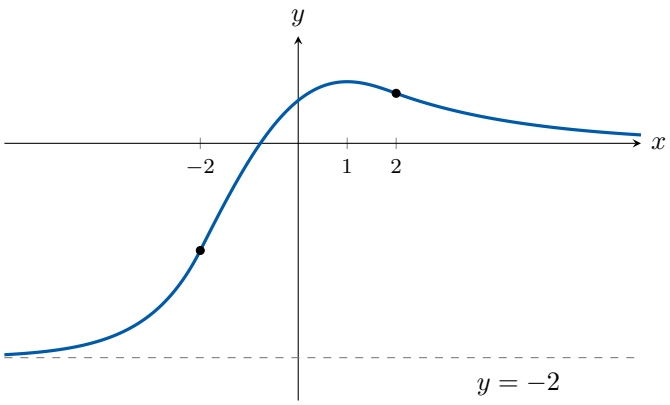


Figura 9: Um gráfico possível para o Exemplo 5; os pontos marcados são os pontos de inflexão.

Outra aplicação da segunda derivada é o teste a seguir para valores máximo e mínimo locais. Ele é uma consequência do Teste da Concavidade.

Teste da Segunda Derivada. *Suponha que f'' seja contínua na proximidade de c.*

(a) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.

(b) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

Por exemplo, a parte (a) é verdadeira porque $f''(x) > 0$ perto de c e, portanto, f é côncava para cima perto de c. Isso significa que o gráfico de f fica *acima* de sua tangente horizontal em c, de modo que f tem um mínimo local em c (veja a Figura 10).

Exemplo 6. Examine a curva $y = x^4 - 4x^3$ em relação à concavidade, aos pontos de inflexão e a mínimos e máximos locais. Use essa informação para esboçar a curva.

Solução. Se $f(x) = x^4 - 4x^3$, então

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3), \qquad f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

Para encontrar os números críticos, fazemos $f'(x) = 0$ e obtemos $x = 0$ e $x = 3$. Para usar o Teste da Segunda Derivada, calculamos f'' nesses números críticos:

$$f''(0) = 0, \qquad f''(3) = 36 > 0.$$

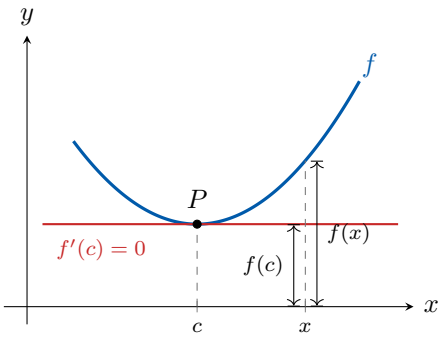


Figura 10: $f''(c) > 0$: f é côncava para cima perto de c e $f(x) \geq f(c)$.

Como $f'(3) = 0$ e $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ é um mínimo local. Como $f''(0) = 0$, o Teste da Segunda Derivada não fornece informação sobre o número crítico 0. Mas, como $f'(x) < 0$ para $x < 0$ e também para $0 < x < 3$, o Teste da Primeira Derivada nos diz que f não tem máximo nem mínimo local em 0. [De fato, a expressão de $f'(x)$ mostra que f decresce à esquerda de 3 e cresce à direita de 3.]

Como $f''(x) = 0$ quando $x = 0$ ou $x = 2$, dividimos a reta real em intervalos com esses números como extremidades e completamos a tabela:

Intervalo	$f''(x) = 12x(x-2)$	Concavidade
$(-\infty, 0)$	$+$	para cima
$(0, 2)$	$-$	para baixo
$(2, \infty)$	$+$	para cima

O ponto $(0, 0)$ é um ponto de inflexão, pois a curva muda ali de côncava para cima para côncava para baixo. Também $(2, -16)$ é um ponto de inflexão, pois ali a curva muda de côncava para baixo para côncava para cima.

Usando o mínimo local, os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão, esboçamos a curva na Figura 11. ■

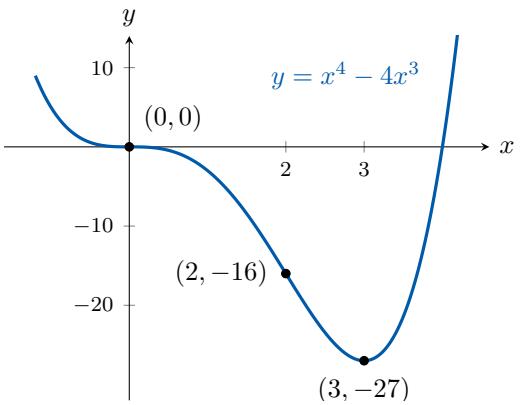


Figura 11: $y = x^4 - 4x^3$: pontos de inflexão em $(0, 0)$ e $(2, -16)$ e mínimo local em $(3, -27)$.

Observação. O Teste da Segunda Derivada é *inconclusivo* quando $f''(c) = 0$. Em outras palavras, nesse ponto pode haver um máximo, um mínimo ou nenhum dos dois (como no Exemplo 6). O teste também falha quando $f''(c)$ não existe. Nesses casos, o Teste da Primeira Derivada deve ser usado. De fato, mesmo quando ambos os testes se aplicam, o Teste da Primeira Derivada é muitas vezes mais fácil de usar.

Exemplo 7. Esboce o gráfico da função $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$.

Solução. Pelas regras de derivação, as duas primeiras derivadas são

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}, \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

Para conferir f', use a Regra do Produto:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\,x^{-1/3}(6-x)^{1/3} - \frac{1}{3}\,x^{2/3}(6-x)^{-2/3} = \frac{2(6-x)-x}{3x^{1/3}(6-x)^{2/3}} = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}};$$

derivando f' do mesmo modo (e pondo $x^{4/3}(6-x)^{5/3}$ em evidência no denominador) obtém-se f''.

Como $f'(x) = 0$ quando $x = 4$ e $f'(x)$ não existe quando $x = 0$ ou $x = 6$, os números críticos são 0, 4 e 6.

Intervalo	$4-x$	$x^{1/3}$	$(6-x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x < 0$	$+$	$-$	$+$	$-$	decrescente em $(-\infty, 0)$
$0 < x < 4$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente em $(0, 4)$
$4 < x < 6$	$-$	$+$	$+$	$-$	decrescente em $(4, 6)$
$x > 6$	$-$	$+$	$+$	$-$	decrescente em $(6, \infty)$

Para encontrar os valores extremos locais, usamos o Teste da Primeira Derivada. Como o sinal de f' muda de negativo para positivo em 0, $f(0) = 0$ é um mínimo local. Como o sinal de f' muda de positivo para negativo em 4, $f(4) = 2^{5/3}$ é um máximo local. O sinal de f' não muda em 6; logo, não há nem mínimo nem máximo ali. (O Teste da Segunda Derivada poderia ser usado em 4, mas não em 0 ou 6, pois f'' não existe nesses pontos.)

Examinando a expressão de $f''(x)$ e observando que $x^{4/3} \geq 0$ para todo x, temos $f''(x) < 0$ para $x < 0$ e para $0 < x < 6$, e $f''(x) > 0$ para $x > 6$. Logo, f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e em $(0, 6)$ e côncava para cima em $(6, \infty)$, e o único ponto de inflexão é $(6, 0)$. O gráfico está esboçado na Figura 12. Observe que a curva tem tangentes verticais em $(0, 0)$ e $(6, 0)$, pois $|f'(x)| \to \infty$ quando $x \to 0$ e quando $x \to 6$. ■

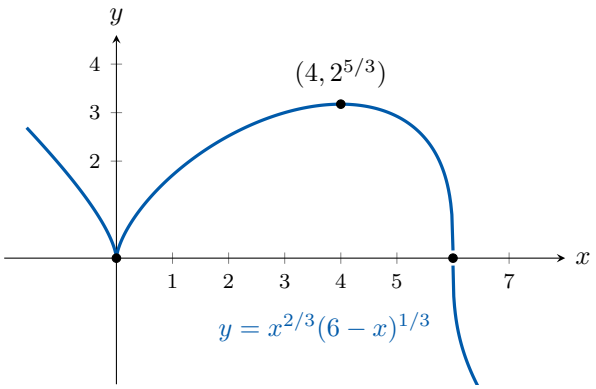


Figura 12: $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$: tangentes verticais em $(0, 0)$ e $(6, 0)$; ponto de inflexão em $(6, 0)$.

Observação. Ao reproduzir o gráfico da Figura 12 com uma calculadora gráfica ou um computador, alguns programas fornecem o gráfico completo, enquanto outros produzem apenas a parte à direita do eixo y, ou somente a parte entre $x = 0$ e $x = 6$, porque não calculam potências fracionárias de números negativos. Uma expressão equivalente que fornece o gráfico correto é

$$y = \left(x^2\right)^{1/3} \cdot \frac{6-x}{|6-x|}\,|6-x|^{1/3}.$$

Exemplo 8. Use a primeira e a segunda derivadas de $f(x) = e^{1/x}$, junto com as assíntotas, para esboçar seu gráfico.

Solução. O domínio de f é $\{x \mid x \neq 0\}$; portanto, verificamos a existência de assíntotas verticais calculando os limites laterais quando $x \to 0$. Quando $x \to 0^+$, sabemos que $t = 1/x \to \infty$, logo

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty,$$

e isso mostra que $x = 0$ é uma assíntota vertical. Quando $x \to 0^-$, temos $t = 1/x \to -\infty$, de modo que

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0.$$

Quando $x \to \pm\infty$, temos $1/x \to 0$; logo,

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1,$$

o que mostra que $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

Agora vamos calcular a derivada. A Regra da Cadeia dá

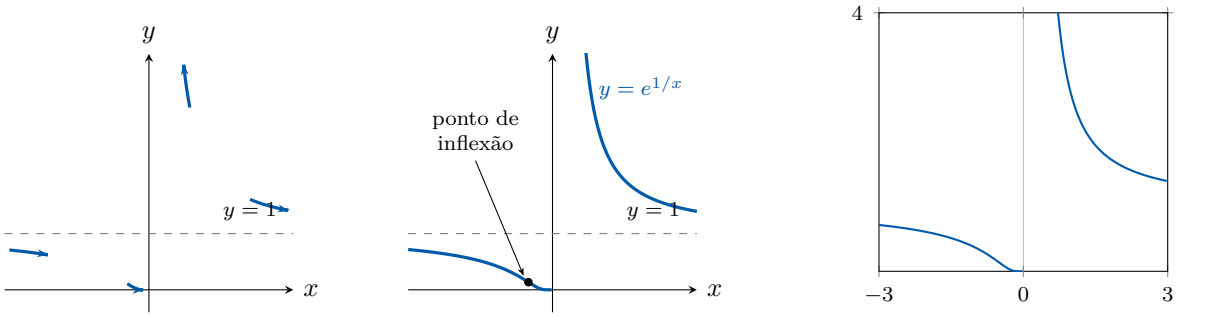
$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}.$$

Como $e^{1/x} > 0$ e $x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$, temos $f'(x) < 0$ para todo $x \neq 0$. Assim, f é decrescente em $(-\infty, 0)$ e em $(0, \infty)$. Não há número crítico; logo, a função não tem máximo nem mínimo locais. A segunda derivada é

$$f''(x) = -\frac{x^2 e^{1/x}\,(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4} = \frac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}.$$

Como $e^{1/x} > 0$ e $x^4 > 0$, temos $f''(x) > 0$ quando $x > -\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ e $f''(x) < 0$ quando $x < -\frac{1}{2}$. Portanto, a curva é côncava para baixo em $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ e côncava para cima em $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e em $(0, \infty)$. O ponto de inflexão é $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$.

Para esboçar o gráfico de f, primeiro desenhamos a assíntota horizontal $y = 1$ (tracejada), junto com as partes da curva próximas das assíntotas, em um esboço preliminar [Figura 13(a)]. Essas partes refletem a informação sobre os limites e o fato de que f é decrescente tanto em $(-\infty, 0)$ quanto em $(0, \infty)$. Observe que indicamos que $f(x) \to 0$ quando $x \to 0^-$, mesmo que $f(0)$ não exista. Na Figura 13(b) terminamos o esboço incorporando a informação sobre a concavidade e o ponto de inflexão. Na Figura 13(c) conferimos o trabalho com um gráfico traçado por computador. ■



(a) Esboço preliminar (b) Esboço acabado (c) Confirmação por computador

Figura 13: O gráfico de $f(x) = e^{1/x}$.