

Aula 8 — Regra de l'Hôpital e polinômios de Taylor

16/10/2026 · Stewart, *Cálculo*, vol. 1, Seção 4.4, Projeto Aplicado da Seção 3.10 e Apêndice H

Nesta aula usamos as derivadas para calcular limites que não podem ser obtidos simplesmente substituindo valores: as formas indeterminadas dos tipos $\frac{0}{0}$, ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 e 1^∞ , tratadas pela Regra de l'Hôpital. Em seguida melhoramos a aproximação linear da Seção 3.10: em vez da reta tangente, usamos polinômios de grau 2, 3, ..., n que têm o mesmo valor e as mesmas primeiras n derivadas que a função em um ponto (os polinômios de Taylor). Fazendo o grau crescer indefinidamente chegamos às séries de Taylor (Seções 11.10 e 11.11 do vol. 2), que representam funções como e^x , $\sin x$, $\cos x$ e $\ln(1+x)$ como “polinômios infinitos” e permitem estimar o erro das aproximações. Por fim, com os números complexos do Apêndice H, a série de e^x leva à fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

4.4 Formas Indeterminadas e Regra de l'Hôpital

Suponha que estejamos tentando analisar o comportamento da função

$$F(x) = \frac{\ln x}{x-1}.$$

Apesar de F não estar definida em $x=1$, precisamos saber como F se comporta *próximo* de 1. Em particular, gostaríamos de saber o valor do limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}. \quad (1)$$

No cálculo desse limite não podemos aplicar a Propriedade 5 dos Limites (o limite de um quociente é o quociente dos limites; veja a Seção 2.3), pois o limite do denominador é 0. De fato, embora o limite (1) exista, seu valor não é óbvio, porque tanto o numerador como o denominador tendem a 0 e $\frac{0}{0}$ não está definido.

Em geral, se tivermos um limite da forma

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

em que $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow a$, então o limite pode ou não existir, e é chamado **forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$** . Encontramos alguns limites desse tipo no Capítulo 2. Para funções racionais, podemos cancelar os fatores comuns:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Usamos um argumento geométrico para mostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Mas esses métodos não funcionam para limites como (1); por isso, nesta seção introduzimos um método sistemático, conhecido como *Regra de l'Hôpital*, para o cálculo de formas indeterminadas.

Outra situação na qual um limite não é óbvio ocorre quando procuramos uma assíntota horizontal de F e precisamos calcular o limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x-1}. \quad (2)$$

Não é óbvio como calcular esse limite, pois tanto o numerador como o denominador tornam-se muito grandes quando $x \rightarrow \infty$. Há uma disputa entre o numerador e o denominador. Se o numerador ganhar, o limite será ∞ ; se o denominador ganhar, a resposta será 0. Ou pode haver algum equilíbrio e, nesse caso, a resposta será algum número positivo finito.

Em geral, se tivermos um limite da forma $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ em que $f(x) \rightarrow \infty$ (ou $-\infty$) e $g(x) \rightarrow \infty$ (ou $-\infty$), então o limite pode ou não existir, e é chamado **forma indeterminada do tipo ∞/∞** . Vimos na Seção 2.6 que esse tipo de limite pode ser calculado para certas funções, incluindo as racionais, dividindo o numerador e o denominador pela potência mais alta de x que ocorre no denominador. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Esse método não funciona para um limite como (2), mas a Regra de l'Hôpital aplica-se também a esse tipo de forma indeterminada.

Regra de l'Hôpital. *Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{ou que} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞ .) Então

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

se o limite do lado direito existir (ou for ∞ ou $-\infty$).

A Figura 1 sugere visualmente por que a Regra de l'Hôpital pode ser verdadeira. O primeiro gráfico mostra duas funções deriváveis f e g que tendem a 0 quando $x \rightarrow a$. Se dermos um *zoom* em direção ao ponto $(a, 0)$, os gráficos começariam a parecer quase lineares. Mas, se as funções fossem realmente lineares, como no segundo gráfico, sua razão seria

$$\frac{m_1(x - a)}{m_2(x - a)} = \frac{m_1}{m_2},$$

que é a razão de suas derivadas. Isso sugere que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

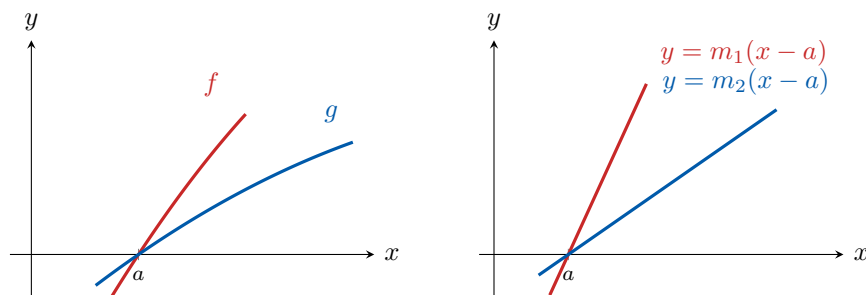


Figura 1: Perto de $(a, 0)$, os gráficos de f e g parecem retas, e a razão f/g fica próxima da razão m_1/m_2 das inclinações.

Observação (1). A Regra de l'Hôpital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite dos quocientes de suas derivadas, desde que as condições dadas estejam satisfeitas. É especialmente importante verificar as condições relativas aos limites de f e g antes de usar a Regra de l'Hôpital.

Observação (2). A Regra de l'Hôpital é válida também para os limites laterais e para os limites no infinito ou no infinito negativo; isto é, " $x \rightarrow a$ " pode ser substituído por quaisquer dos símbolos a seguir: $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow \infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

Observação (3). Para o caso especial no qual $f(a) = g(a) = 0$, f' e g' são contínuas e $g'(a) \neq 0$, é fácil ver por que a Regra de l'Hôpital é verdadeira. De fato, usando a forma alternativa da definição de derivada, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}.\end{aligned}$$

É mais difícil demonstrar a versão geral da Regra de l'Hôpital. A demonstração (Apêndice F) usa a seguinte generalização do Teorema do Valor Médio, que leva o nome do matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789–1857).

Teorema (do Valor Médio de Cauchy). *Suponha que as funções f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b) , com $g'(x) \neq 0$ para todo x em (a, b) . Então existe um número c em (a, b) tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

No caso especial $g(x) = x$, temos $g'(c) = 1$ e o teorema é exatamente o Teorema do Valor Médio comum; a demonstração também é parecida (troca-se a função auxiliar h usada na demonstração do TVM por uma que envolve g). Com ele, a ideia da demonstração da Regra de l'Hôpital no caso $\frac{0}{0}$ e a finito é a seguinte: redefinindo, se necessário, $f(a) = g(a) = 0$, as funções ficam contínuas em a ; para $x > a$ em I , o Teorema do Valor Médio de Cauchy no intervalo $[a, x]$ dá um número y com $a < y < x$ e

$$\frac{f'(y)}{g'(y)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Quando $x \rightarrow a^+$, também $y \rightarrow a^+$, e então $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)}$. O limite à esquerda é análogo. (Para $a = \infty$ basta fazer $t = 1/x$.)

Nota histórica. A Regra de l'Hôpital é assim chamada em homenagem ao nobre francês Marquês de l'Hôpital (1661–1704), mas foi descoberta pelo matemático suíço John Bernoulli (1667–1748). Você pode encontrar algumas vezes l'Hôpital escrito como l'Hôpital, mas ele soletrava seu próprio nome como l'Hôspital, como era comum no século XVII.

Exemplo 1. Encontre $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$.

Solução. Uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln 1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0,$$

podemos aplicar a Regra de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1. \quad \blacksquare$$

Atenção: quando usamos a Regra de l'Hôpital, derivamos o numerador e o denominador *separadamente*. Nós não usamos a Regra do Quociente.

Exemplo 2. Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$.

Solução. Temos $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$; logo, a Regra de l'Hôpital fornece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x}.$$

Uma vez que $e^x \rightarrow \infty$ e $2x \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \infty$, o limite do lado direito também é indeterminado, mas uma segunda aplicação da Regra de l'Hôpital fornece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty. \quad \blacksquare$$

O gráfico da função do Exemplo 2 está na Figura 2. Já observamos que a função exponencial cresce muito mais rapidamente que a função potência; assim, o resultado do Exemplo 2 é esperado.

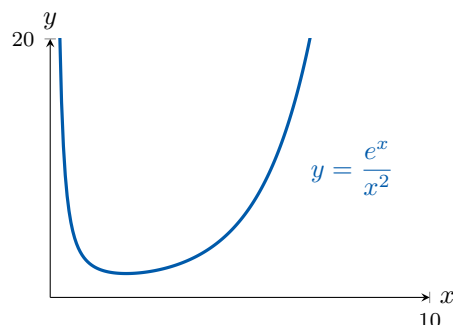


Figura 2: $y = e^x/x^2$ no intervalo $(0, 10]$.

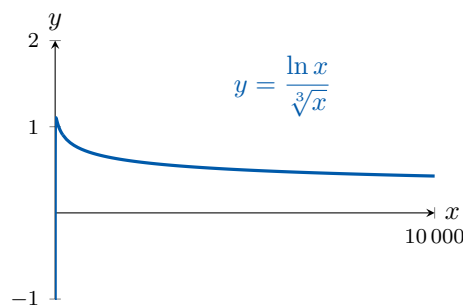


Figura 3: $y = \ln x / \sqrt[3]{x}$ no intervalo $(0, 10\,000]$.

Exemplo 3. Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

Solução. Uma vez que $\ln x \rightarrow \infty$ e $\sqrt[3]{x} \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \infty$, a Regra de l'Hôpital pode ser aplicada:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}.$$

Observe que o limite do lado direito agora é do tipo $\frac{0}{0}$. Mas, em vez de aplicarmos a Regra de l'Hôpital uma segunda vez, como fizemos no Exemplo 2, simplificamos a expressão e vemos que é desnecessária uma segunda aplicação da regra:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0. \quad \blacksquare$$

O gráfico da função do Exemplo 3 está na Figura 3. Já havíamos discutido anteriormente o lento crescimento dos logaritmos; então não é surpresa que essa razão tenda a zero quando $x \rightarrow \infty$.

Exemplo 4. Encontre $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$. (Veja o Exercício 44 na Seção 2.2.)

Solução. Observando que $\operatorname{tg} x - x \rightarrow 0$ e $x^3 \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$, usamos a Regra de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}.$$

Uma vez que o limite do lado direito é ainda indeterminado do tipo $\frac{0}{0}$, aplicamos novamente a Regra de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x}.$$

Pelo fato de $\lim_{x \rightarrow 0} \sec^2 x = 1$, simplificamos os cálculos da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \sec^2 x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Podemos calcular este último limite ou usando a Regra de l'Hôpital mais uma vez ou escrevendo $\operatorname{tg} x$ como $(\sin x)/(\cos x)$ e usando nosso conhecimento de limites trigonométricos. Juntando todos esses passos, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x}{1} = \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

O gráfico na Figura 4 dá uma confirmação visual do resultado do Exemplo 4. Se déssemos um *zoom*, porém, obteríamos um gráfico impreciso, pois $\operatorname{tg} x$ está próximo de x para x pequeno, e a subtração $\operatorname{tg} x - x$ perde muitos algarismos significativos na calculadora. (Veja o Exercício 44(d) na Seção 2.2.)

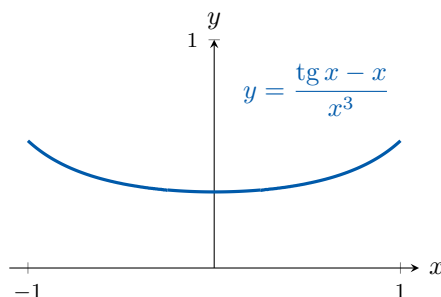


Figura 4: $y = (\operatorname{tg} x - x)/x^3$ no intervalo $[-1, 1]$: perto de 0 os valores se aproximam de $\frac{1}{3}$.

Exemplo 5. Encontre $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$.

Solução. Se tentarmos usar cegamente a Regra de l'Hôpital, obteremos

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty.$$

Isso está **errado!** Embora o numerador $\sin x \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pi^-$, perceba que o denominador $(1 - \cos x)$ não tende a zero; logo, não podemos aplicar aqui a Regra de l'Hôpital.

O limite pedido é na verdade fácil de ser encontrado, pois a função é contínua em π e o denominador é diferente de zero:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{\sin \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = 0. \quad \blacksquare$$

O Exemplo 5 mostra o que pode acontecer de errado ao usar impensadamente a Regra de l'Hôpital. Outros limites *podem* ser encontrados pela Regra de l'Hôpital, mas são mais facilmente calculados por outros métodos. (Veja os Exemplos 3 e 5 na Seção 2.3, o Exemplo 3 na Seção 2.6 e a discussão no começo desta seção.) Assim, quando calcular qualquer limite, você deve considerar outros métodos antes de usar a Regra de l'Hôpital.

Produtos Indeterminados

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então não está claro qual o valor de $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)]$, se houver algum. Há uma disputa entre f e g . Se f ganhar, a resposta é 0; se g vencer, a resposta será ∞ (ou $-\infty$). Ou pode haver um equilíbrio, e então a resposta é um número finito diferente de zero. Esse tipo de limite é chamado **forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$** . Podemos lidar com ela escrevendo o produto fg como um quociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \quad \text{ou} \quad fg = \frac{g}{1/f}.$$

Isso converte o limite dado na forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞ , de modo que podemos usar a Regra de l'Hôpital.

Exemplo 6. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

Solução. O limite dado é indeterminado, pois, como $x \rightarrow 0^+$, o primeiro fator (x) tende a 0, enquanto o segundo fator ($\ln x$) tende a $-\infty$. Escrevendo $x = 1/(1/x)$, temos $1/x \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow 0^+$; logo, a Regra de l'Hôpital fornece

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \quad \blacksquare$$

A Figura 5 mostra o gráfico da função do Exemplo 6. Observe que a função não está definida em $x = 0$; o gráfico tende à origem, mas nunca realmente a atinge.

Observação. Ao resolver o Exemplo 6, outra opção possível seria escrever

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1/\ln x}.$$

Isso dá uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$, mas, se aplicarmos a Regra de l'Hôpital, obteremos uma expressão mais complicada do que a que começamos. Em geral, quando reescrevemos o produto indeterminado, tentamos escolher a opção que leva a um limite mais simples.

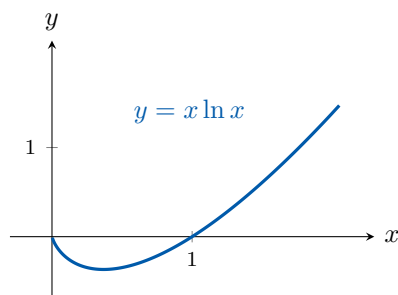


Figura 5: $y = x \ln x$: o gráfico tende à origem quando $x \rightarrow 0^+$.

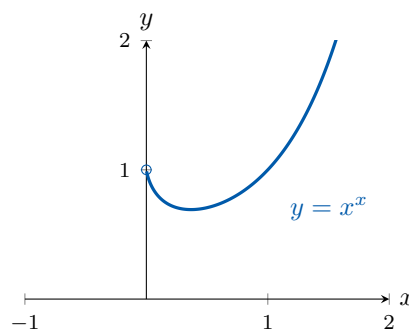


Figura 6: $y = x^x$, $x > 0$: os valores tendem a 1 quando $x \rightarrow 0^+$.

Diferenças Indeterminadas

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, então o limite

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$$

é chamado **forma indeterminada do tipo $\infty - \infty$** . De novo, há uma disputa entre f e g . A resposta será ∞ (se f ganhar) ou será $-\infty$ (se g ganhar), ou haverá entre eles um equilíbrio, resultando um número finito? Para descobrirmos, tentamos converter a diferença em um quociente (usando um denominador comum ou racionalização, ou pondo em evidência um fator em comum, por exemplo), de maneira a termos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo 7. Calcule $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\sec x - \operatorname{tg} x)$.

Solução. Observe primeiro que $\sec x \rightarrow \infty$ e $\operatorname{tg} x \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow (\pi/2)^-$; logo, o limite é indeterminado. Aqui usamos um denominador comum:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\sec x - \operatorname{tg} x) &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0. \end{aligned}$$

Observe que o uso da Regra de l'Hôpital é justificado, pois $1 - \sin x \rightarrow 0$ e $\cos x \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow (\pi/2)^-$. ■

Potências Indeterminadas

Várias formas indeterminadas surgem do limite $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, tipo 0^0 ;
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, tipo ∞^0 ;
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, tipo 1^∞ .

Cada um dos três casos pode ser tratado tanto tomando o logaritmo natural,

$$\text{seja } y = [f(x)]^{g(x)}, \text{ então } \ln y = g(x) \ln f(x),$$

quanto escrevendo a função como uma exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

(Relembre que ambos os métodos foram utilizados na derivação dessas funções.) Em qualquer método, somos levados a um produto indeterminado $g(x) \ln f(x)$, que é do tipo $0 \cdot \infty$.

Observação. Apesar de as formas do tipo 0^0 , ∞^0 e 1^∞ serem indeterminadas, a forma 0^∞ não é indeterminada: se $f(x) \rightarrow 0^+$ e $g(x) \rightarrow \infty$, então $[f(x)]^{g(x)} \rightarrow 0$.

Exemplo 8. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin 4x)^{\cotg x}$.

Solução. Observe primeiro que, quando $x \rightarrow 0^+$, temos $1 + \sin 4x \rightarrow 1$ e $\cotg x \rightarrow \infty$; assim, o limite dado é indeterminado (tipo 1^∞). Considere

$$y = (1 + \sin 4x)^{\cotg x}.$$

Então

$$\ln y = \ln \left[(1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cotg x} \right] = \cotg x \ln(1 + \operatorname{sen} 4x) = \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\operatorname{tg} x},$$

que é do tipo $\frac{0}{0}$ quando $x \rightarrow 0^+$; logo, a Regra de l'Hôpital fornece

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \cos 4x}{\sec^2 x} = 4.$$

Até agora calculamos o limite de $\ln y$, mas o que realmente queremos é o limite de y . Para achá-lo usamos o fato de que $y = e^{\ln y}$ e a continuidade da exponencial:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cotg x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln y} = e^4. \quad \blacksquare$$

Exemplo 9. Encontre $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

Solução. Observe que esse limite é indeterminado, pois $0^x = 0$ para todo $x > 0$, mas $x^0 = 1$ para todo $x \neq 0$. Podemos proceder como no Exemplo 8 ou escrever a função como uma exponencial:

$$x^x = \left(e^{\ln x} \right)^x = e^{x \ln x}.$$

No Exemplo 6 usamos a Regra de l'Hôpital para mostrar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1. \quad \blacksquare$$

O gráfico da função $y = x^x$, $x > 0$, está na Figura 6. Observe que, embora 0^0 não esteja definido, os valores da função tendem a 1 quando $x \rightarrow 0^+$. Isso confirma o resultado do Exemplo 9.

3.10 Projeto Aplicado: Polinômios de Taylor

A aproximação pela reta tangente $L(x)$ é a melhor aproximação de primeiro grau (linear) para $f(x)$ próximo de $x = a$ porque $f(x)$ e $L(x)$ têm a mesma taxa de variação (derivada) em a . Para uma aproximação melhor que a linear, vamos tentar uma aproximação de segundo grau (quadrática) $P(x)$. Em outras palavras, aproximaremos uma curva por uma parábola em vez de uma reta. Para nos assegurarmos de que é uma boa aproximação, estipularemos o seguinte:

- (i) $P(a) = f(a)$ (P e f devem ter o mesmo valor em a);
- (ii) $P'(a) = f'(a)$ (P e f devem ter a mesma taxa de variação em a);
- (iii) $P''(a) = f''(a)$ (as inclinações de P e f devem variar na mesma taxa em a).

Os itens do projeto do livro aparecem a seguir como exemplos resolvidos.

Exemplo 1. Encontre a aproximação quadrática $P(x) = A + Bx + Cx^2$ para a função $f(x) = \cos x$ que satisfaça as condições (i), (ii) e (iii) com $a = 0$. Faça o gráfico de P , f e da aproximação linear $L(x) = 1$ em uma mesma tela. Comente a qualidade das aproximações P e L de f .

Solução. Temos $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ e $f''(x) = -\cos x$, de modo que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ e $f''(0) = -1$. Para $P(x) = A + Bx + Cx^2$,

$$P(0) = A, \quad P'(x) = B + 2Cx, \quad P'(0) = B, \quad P''(x) = 2C.$$

As condições dão $A = 1$, $B = 0$ e $2C = -1$, isto é, $C = -\frac{1}{2}$:

$$\cos x \approx P(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x \text{ perto de } 0).$$

A linearização é $L(x) = f(0) + f'(0)x = 1$, a reta tangente horizontal. No gráfico (Figura 7, à esquerda) vemos que a parábola acompanha a curva $y = \cos x$ muito melhor do que a reta: em $x = 0,5$, por exemplo, $\cos 0,5 \approx 0,8776$, enquanto $P(0,5) = 0,875$ e $L(0,5) = 1$; em $x = 1$, $\cos 1 \approx 0,5403$, $P(1) = 0,5$ e $L(1) = 1$. A reta não “vê” que o cosseno se curva para baixo; a parábola tem a mesma concavidade que a curva em 0. ■

Exemplo 2. Determine os valores de x para os quais a aproximação quadrática $f(x) \approx P(x)$ do Exemplo 1 tem precisão de 0,1.

Solução. Como na Seção 3.10, queremos $|\cos x - P(x)| < 0,1$, isto é,

$$\cos x - 0,1 < 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x + 0,1,$$

ou seja, a parábola deve ficar entre as curvas $y = \cos x - 0,1$ e $y = \cos x + 0,1$ (Figura 7, à direita). O gráfico mostra que a parábola fica abaixo de $y = \cos x$ e corta a curva de baixo, $y = \cos x - 0,1$, em $x \approx \pm 1,26$. Assim, a aproximação tem precisão de 0,1 quando $-1,26 < x < 1,26$. (Resolvendo numericamente $\cos x - 1 + x^2/2 = 0,1$, obtém-se $x \approx \pm 1,2612$.) ■

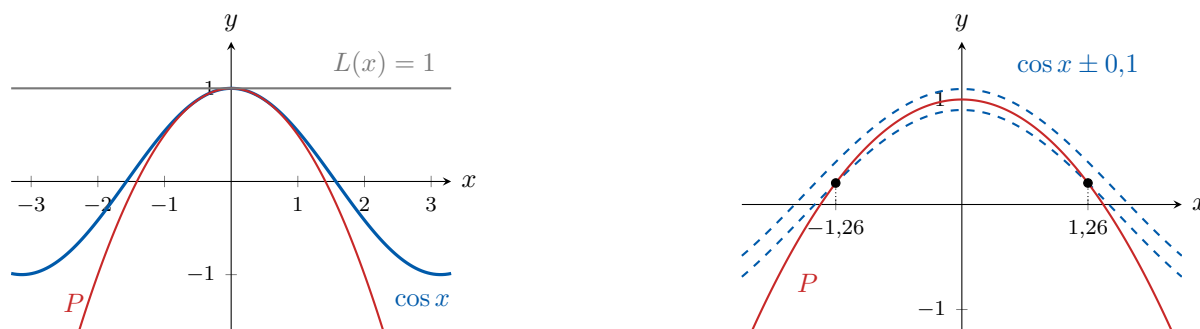


Figura 7: À esquerda: $\cos x$, a aproximação quadrática $P(x) = 1 - x^2/2$ e a linear $L(x) = 1$. À direita: a precisão de 0,1 vale enquanto P fica entre $\cos x - 0,1$ e $\cos x + 0,1$.

A fórmula geral da aproximação quadrática. Para aproximar uma função f por uma função quadrática P próxima a um número a , é melhor escrever P na forma

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2.$$

Então $P(a) = A$; $P'(x) = B + 2C(x - a)$, logo $P'(a) = B$; e $P''(x) = 2C$. As condições (i), (ii) e (iii) dão $A = f(a)$, $B = f'(a)$ e $C = \frac{1}{2}f''(a)$. Portanto a função quadrática que satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

Note que os dois primeiros termos formam a linearização $L(x)$: a aproximação quadrática é a linear acrescida de um termo de correção.

Exemplo 3. Encontre a aproximação quadrática para $f(x) = \sqrt{x+3}$ próxima a $a = 1$. Faça os gráficos de f , da aproximação quadrática e da aproximação linear do Exemplo 1 da Seção 3.10 na mesma tela. O que você conclui?

Solução. Temos $f(x) = (x+3)^{1/2}$, $f'(x) = \frac{1}{2}(x+3)^{-1/2}$ e $f''(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^{-3/2}$, de modo que

$$f(1) = 2, \quad f'(1) = \frac{1}{4}, \quad f''(1) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{32}.$$

Pela fórmula acima,

$$P(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{64}(x-1)^2,$$

enquanto a linearização era $L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$. A tabela compara as duas aproximações com os valores exatos.

	x	Pela $L(x)$	Pela $P(x)$	Valor real
$\sqrt{3,9}$	0,9	1,975	1,9748438	1,9748418...
$\sqrt{4,05}$	1,05	2,0125	2,0124609	2,0124612...
$\sqrt{5}$	2	2,25	2,234375	2,2360680...
$\sqrt{6}$	3	2,5	2,4375	2,4494897...
$\sqrt{8}$	5	3	2,75	2,8284271...

Concluimos que a aproximação quadrática é bem mais precisa que a linear perto de $a = 1$ (em $x = 1,05$ o erro cai de cerca de 4×10^{-5} para cerca de 2×10^{-7}) e continua melhor longe de 1. No gráfico (Figura 8), a reta tangente fica acima da curva, enquanto a parábola, que se curva para baixo como a própria função, acompanha a curva em um intervalo bem maior. ■

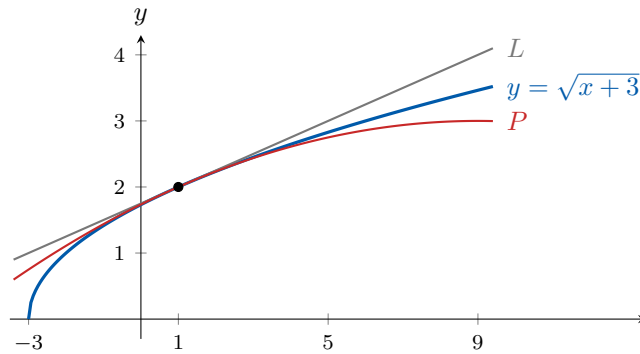


Figura 8: $y = \sqrt{x+3}$ com a aproximação linear L e a quadrática P em $a = 1$.

Polinômios de grau n . Em vez de ficarmos satisfeitos com aproximações lineares ou quadráticas para $f(x)$ próximo a $x = a$, vamos tentar encontrar aproximações melhores por polinômios de graus mais altos. Procuramos um polinômio de grau n

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n$$

tal que T_n e suas primeiras n derivadas tenham os mesmos valores em $x = a$ que f e suas primeiras n derivadas. Derivando repetidamente,

$$T'_n(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1},$$

$$T''_n(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + \cdots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2},$$

$$T'''_n(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1c_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3},$$

e assim por diante. Ao derivar k vezes, os termos de grau menor que k desaparecem, o termo $c_k(x-a)^k$ vira a constante $k!c_k$ e os de grau maior que k ainda têm um fator $(x-a)$. Fazendo $x = a$, obtemos $T_n^{(k)}(a) = k!c_k$. Assim, as condições $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ estão satisfeitas exatamente quando $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$ e, em geral,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

onde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k$ (e, por convenção, $0! = 1$ e $f^{(0)} = f$).

Definição. O polinômio

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

é denominado *polinômio de Taylor de grau n de f centrado em a* .

Para $n = 1$, $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = L(x)$ é a linearização; para $n = 2$, T_2 é a aproximação quadrática P obtida acima.

Exemplo 4. Encontre o polinômio de Taylor de grau 8 centrado em $a = 0$ para a função $f(x) = \cos x$. Faça os gráficos de f junto com os polinômios de Taylor T_2 , T_4 , T_6 , T_8 na janela retangular $[-5, 5]$ por $[-1, 4; 1, 4]$ e comente quão bem eles aproximam f .

Solução. As derivadas de $\cos x$ se repetem em ciclos de quatro:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= -\sin x, & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= -\cos x, & f''(0) &= -1, \\ f'''(x) &= \sin x, & f'''(0) &= 0, \\ f^{(4)}(x) &= \cos x, & f^{(4)}(0) &= 1, \end{aligned}$$

e daí em diante os valores em 0 continuam $0, -1, 0, 1, \dots$. Assim, só as potências pares aparecem, com sinais alternados:

$$T_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320}.$$

Os polinômios de grau menor são os pedaços iniciais: $T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ (o P do Exemplo 1), $T_4(x) = T_2(x) + \frac{x^4}{24}$ e $T_6(x) = T_4(x) - \frac{x^6}{720}$. (Como $f'''(0) = 0$, temos $T_3 = T_2$; do mesmo modo $T_5 = T_4$, etc.)

Na Figura 9 vemos que todos os polinômios coincidem muito bem com $\cos x$ perto de 0 e que, quanto maior o grau, maior o intervalo em que a aproximação é boa. Numericamente, a precisão de 0,1 vale aproximadamente para $|x| < 1,26$ com T_2 , $|x| < 2,06$ com T_4 , $|x| < 2,85$ com T_6 e $|x| < 3,63$ com T_8 . Longe de 0 os polinômios se afastam do cosseno (por exemplo, $T_8(5) \approx 2,53$, enquanto $\cos 5 \approx 0,28$): um polinômio não constante sempre tende a $\pm\infty$, ao passo que $\cos x$ permanece entre -1 e 1 . ■

Séries de Taylor e de Maclaurin

No Exemplo 4 acima, aumentar o grau melhorou a aproximação. É natural perguntar o que acontece quando deixamos n crescer indefinidamente, isto é, quando somamos *todos* os termos $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. Isso é o assunto das Seções 11.10 e 11.11 do vol. 2; aqui fazemos só o necessário, sem a teoria geral de convergência de séries.

O que é uma série. Uma soma com infinitas parcelas,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots,$$

é chamada *série*. Não se pode “somar infinitos números” de uma vez; o que se faz é somar as $N+1$ primeiras parcelas, obtendo as *somas parciais* $s_N = b_0 + b_1 + \cdots + b_N$, e ver o que acontece quando $N \rightarrow \infty$. Por definição,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \lim_{N \rightarrow \infty} (b_0 + b_1 + \cdots + b_N),$$

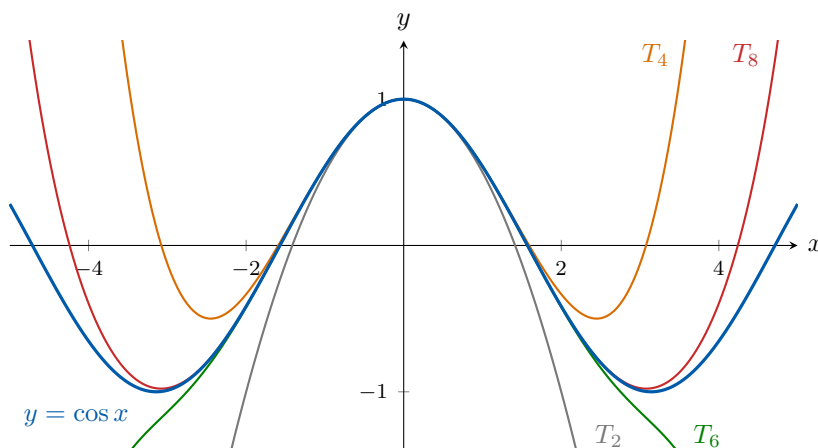


Figura 9: $y = \cos x$ e seus polinômios de Taylor T_2 , T_4 , T_6 e T_8 centrados em 0, na janela $[-5, 5]$ por $[-1, 4; 1, 4]$.

quando esse limite existe (e é finito); nesse caso dizemos que a série *converge*. Se o limite não existir, a série *diverge* e não tem soma. Uma consequência simples: se a série converge, então $b_N = s_N - s_{N-1} \rightarrow 0$; portanto, *se os termos b_n não tendem a 0, a série diverge*.

Para uma função f com derivadas de todas as ordens em a , as somas parciais da série abaixo são exatamente os polinômios de Taylor $T_n(x)$. Assim, a pergunta “a série soma $f(x)$?” é a pergunta “ $T_n(x) \rightarrow f(x)$ quando $n \rightarrow \infty$?”.

Definição. Se f tem derivadas de todas as ordens em a , a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots$$

é chamada *série de Taylor da função f em a* (ou *ao redor de a* , ou *centrada em a*). No caso especial $a = 0$, ela se torna

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

e recebe o nome de *série de Maclaurin*.

Os coeficientes $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ são os mesmos dos polinômios de Taylor, e pelo mesmo motivo: se f pudesse ser escrita como um “polinômio infinito” $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$ e pudéssemos derivá-lo termo a termo, como na dedução de T_n , obteríamos $f^{(n)}(a) = n! c_n$. (No vol. 2 mostra-se que isso de fato é válido: *se f tem uma representação desse tipo, ela é necessariamente a série de Taylor.*)

O resto. Para decidir se a série de Taylor de f soma $f(x)$, olhamos para o *resto* da série de Taylor,

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \quad \text{isto é,} \quad f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

que é o erro cometido ao aproximar $f(x)$ por $T_n(x)$. Pela definição de soma de uma série, temos o seguinte.

Teorema. Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, em que T_n é o polinômio de Taylor de grau n de f em a , e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$, então f é igual à soma de sua série de Taylor no intervalo $|x - a| < R$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n.$$

Para mostrar que $R_n(x) \rightarrow 0$ usamos, em geral, a estimativa a seguir.

Teorema (Desigualdade de Taylor). *Se $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ para todo t entre a e x (por exemplo, para $|t - a| \leq d$, com $|x - a| \leq d$), então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade*

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - a|^{n+1}$$

Não demonstraremos essa desigualdade. Ela é consequência de uma fórmula exata para o resto, a *forma de Lagrange*: existe um número z entre a e x tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}.$$

Para $n = 0$ ela diz que $f(x) - f(a) = f'(z)(x - a)$: é exatamente o Teorema do Valor Médio! A forma de Lagrange é, portanto, uma generalização do TVM, e pode ser demonstrada aplicando o Teorema de Rolle repetidas vezes. Trocando $f^{(n+1)}(z)$ por sua cota M , obtém-se a Desigualdade de Taylor.

Observação. Existem funções que *não* são iguais à soma de sua série de Taylor. Por exemplo, a função definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ tem $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n (veja o vol. 2); sua série de Maclaurin é a série nula, que só coincide com f em $x = 0$. Por isso é preciso verificar que $R_n(x) \rightarrow 0$. Para as funções desta aula, isso acontece.

Exemplo 1. Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$.

Solução. Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, de modo que $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para todo n . Portanto a série de Maclaurin de f é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

e seus polinômios de Taylor em 0 são $T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ (Figura 10). ■

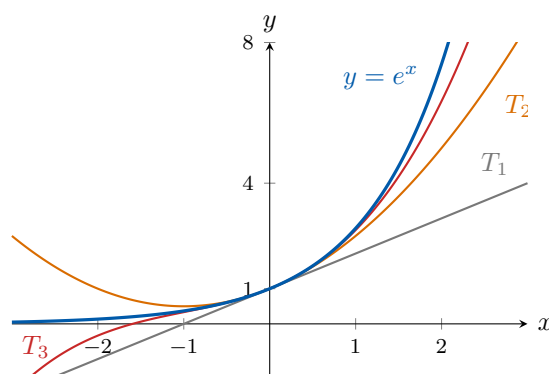


Figura 10: $y = e^x$ e seus polinômios de Taylor T_1 , T_2 e T_3 em 0.

Para mostrar que essa série realmente soma e^x , precisamos de um limite que aparece o tempo todo nas estimativas de resto.

Um limite importante. Para todo número real x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

De fato, fixe x e escolha um inteiro $N > 2|x|$. Para $n > N$,

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^N}{N!} \cdot \frac{|x|}{N+1} \cdot \frac{|x|}{N+2} \cdots \frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|^N}{N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N},$$

pois cada fator $|x|/k$ com $k > N$ é menor que $\frac{1}{2}$. O lado direito é uma constante vezes $(\frac{1}{2})^{n-N}$, que tende a 0. Pelo Teorema do Confronto, $|x|^n/n! \rightarrow 0$. (O fatorial cresce mais depressa que qualquer exponencial.)

Exemplo 2. Demonstre que e^x é igual à soma de sua série de Maclaurin.

Solução. Seja $d > 0$ qualquer e $|x| \leq d$. Como $f^{(n+1)}(t) = e^t$ é crescente, $|f^{(n+1)}(t)| = e^t \leq e^d$ para $|t| \leq d$. A Desigualdade de Taylor, com $a = 0$ e $M = e^d$, diz que

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!} |x|^{n+1} \quad \text{para } |x| \leq d.$$

Pelo limite importante, $|x|^{n+1}/(n+1)! \rightarrow 0$, e então $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ pelo Teorema do Confronto. Como d é arbitrário, isso vale para todo x , e portanto

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \text{para todo } x$$

Em particular, com $x = 1$, obtemos a seguinte expressão para o número e :

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

As somas parciais convergem rapidamente: $T_5(1) = 2,7166667$ e $T_{10}(1) = 2,7182818$, enquanto $e = 2,7182818 \dots$. Usando $e < 3$ na estimativa acima (com $d = 1$), o erro de $T_{10}(1)$ é no máximo $3/11! \approx 7,5 \times 10^{-8}$ (o erro verdadeiro é cerca de $2,7 \times 10^{-8}$). ■

Exemplo 3. Encontre a série de Maclaurin de $\sin x$ e demonstre que ela representa $\sin x$ para todo x .

Solução. As derivadas se repetem em ciclos de quatro:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1, \\ f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Os valores em 0 são $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$; só as potências ímpares aparecem, com sinais alternados, e a série de Maclaurin é

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Como $f^{(n+1)}(x)$ é $\pm \sin x$ ou $\pm \cos x$, temos $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$ para todo x . Tomando $M = 1$ na Desigualdade de Taylor,

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

pelo limite importante. Logo $R_n(x) \rightarrow 0$ e

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad \text{para todo } x}$$

A Figura 11 mostra os polinômios T_1 , T_3 , T_5 e T_7 aproximando-se de $\sin x$ em intervalos cada vez maiores. ■

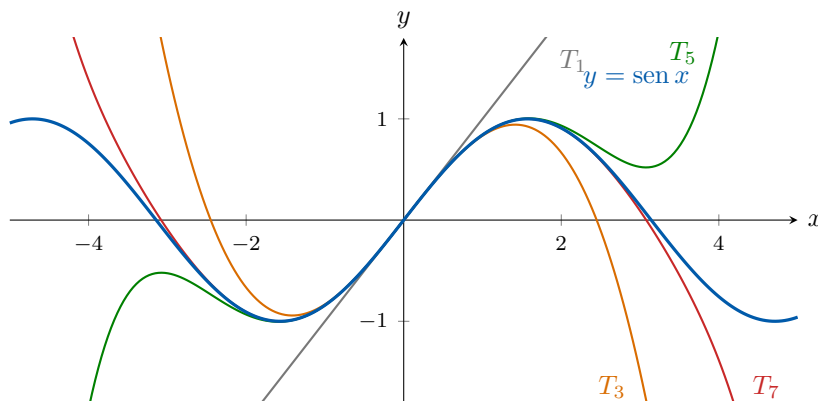


Figura 11: $y = \sin x$ e seus polinômios de Taylor T_1 , T_3 , T_5 e T_7 em 0.

Exemplo 4. Encontre a série de Maclaurin de $\cos x$.

Solução. No Exemplo 4 da seção anterior vimos que as derivadas de $\cos x$ em 0 valem $1, 0, -1, 0, 1, \dots$. Logo a série de Maclaurin é

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Como no Exemplo 3, $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$ para todo x , de modo que $|R_n(x)| \leq |x|^{n+1}/(n+1)! \rightarrow 0$. Portanto

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad \text{para todo } x}$$

Observe que, derivando termo a termo a série do seno, obtemos exatamente a série do cosseno, de acordo com $(\sin x)' = \cos x$. (No vol. 2 mostra-se que séries desse tipo podem ser derivadas termo a termo.) ■

Exemplo 5. Encontre a série de Maclaurin de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ e mostre que ela soma $f(x)$ quando $|x| < 1$.

Solução. Temos $f(x) = (1-x)^{-1}$, $f'(x) = (1-x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1-x)^{-3}$, $f'''(x) = 3 \cdot 2(1-x)^{-4}$ e, em geral, $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}$. Então $f^{(n)}(0) = n!$ e $c_n = n!/n! = 1$ para todo n :

$$T_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Aqui o resto pode ser calculado exatamente. Multiplicando, $(1-x)(1+x+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1}$ (os termos intermediários se cancelam), de modo que, para $x \neq 1$,

$$T_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{e} \quad R_n(x) = \frac{1}{1-x} - T_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Se $|x| < 1$, então $x^{n+1} \rightarrow 0$ e $R_n(x) \rightarrow 0$. Portanto

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)}$$

Essa é a *série geométrica*. Se $|x| \geq 1$, os termos x^n não tendem a 0 e a série diverge. Trocando x por $-x$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad (|x| < 1).$$

Compare com o Exemplo 5: derivando termo a termo a série de $\ln(1+x)$, obtemos $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$, a série de $\frac{1}{1+x}$, que é justamente a derivada de $\ln(1+x)$. ■

A tabela a seguir reúne as séries de Maclaurin importantes, com os intervalos em que valem. As cinco primeiras foram obtidas acima; as duas últimas são deduzidas no vol. 2. (Na série binomial, $\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}$, que é $f^{(n)}(0)/n!$ para $f(x) = (1+x)^k$.)

Função	Série de Maclaurin	Validade
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$(-1, 1)$
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$(-\infty, \infty)$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$	$(-\infty, \infty)$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	$(-\infty, \infty)$

Tabela 1: Séries de Maclaurin importantes e os intervalos em que valem.

Aplicações dos Polinômios de Taylor

Na prática, usamos os polinômios de Taylor (somas parciais da série) como aproximações, e a Desigualdade de Taylor para garantir a precisão.

Exemplo 1.

(a) Aproxime a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ por um polinômio de Taylor de grau 2 em $a = 8$.

(b) Quão precisa é essa aproximação quando $7 \leq x \leq 9$?

Solução. (a) Calculamos as derivadas:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{1/3}, & f(8) &= 2, \\ f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-2/3}, & f'(8) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \\ f''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-5/3}, & f''(8) &= -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{32} = -\frac{1}{144}, \\ f'''(x) &= \frac{10}{27}x^{-8/3}. \end{aligned}$$

Assim, o polinômio de Taylor de grau 2 é

$$T_2(x) = f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2,$$

e a aproximação desejada é

$$\sqrt[3]{x} \approx T_2(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2.$$

(b) A Desigualdade de Taylor com $n = 2$ e $a = 8$ dá $|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x-8|^3$, em que $|f'''(x)| \leq M$.

Como $x \geq 7$, temos $x^{8/3} \geq 7^{8/3}$ e, portanto,

$$f'''(x) = \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{x^{8/3}} \leq \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{7^{8/3}} < 0,0021,$$

pois $7^{8/3} \approx 179,3 > 179$ e $10/(27 \cdot 179) \approx 0,00207$. Podemos então tomar $M = 0,0021$. Além disso, $7 \leq x \leq 9$ significa $-1 \leq x-8 \leq 1$, isto é, $|x-8| \leq 1$. Logo

$$|R_2(x)| \leq \frac{0,0021}{3!} \cdot 1^3 = \frac{0,0021}{6} < 0,0004.$$

Assim, se $7 \leq x \leq 9$, a aproximação da parte (a) tem precisão de 0,0004. (Numericamente, o maior erro no intervalo ocorre em $x = 7$ e vale cerca de 0,00026, abaixo da estimativa.) ■

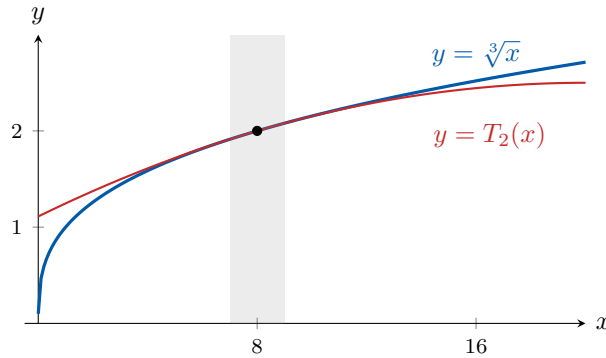


Figura 12: $y = \sqrt[3]{x}$ e T_2 em $a = 8$; a faixa sombreada é $7 \leq x \leq 9$.

Exemplo 2.

(a) Qual é o erro máximo possível ao usar a aproximação

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

quando $-0,3 \leq x \leq 0,3$? Use essa aproximação para encontrar $\sin 12^\circ$ com seis casas decimais.

(b) Para quais valores de x essa aproximação tem precisão de 0,00005?

Solução. (a) O polinômio $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ é T_5 e também T_6 , pois o coeficiente de x^6 na série do seno é 0. Usando $n = 6$ (que dá uma estimativa melhor) e $M = 1$, já que $|f^{(7)}(x)| = |\cos x| \leq 1$,

$$|R_6(x)| \leq \frac{|x|^7}{7!} \leq \frac{(0,3)^7}{5040} \approx 4,3 \times 10^{-8} \quad \text{para } |x| \leq 0,3.$$

O erro é menor que $4,3 \times 10^{-8}$. Para $\sin 12^\circ$, convertamos para radianos: $12^\circ = \frac{12\pi}{180} = \frac{\pi}{15} \approx 0,20943951$, que está em $[-0,3; 0,3]$. Então

$$\sin 12^\circ \approx \frac{\pi}{15} - \frac{(\pi/15)^3}{3!} + \frac{(\pi/15)^5}{5!} \approx 0,20791169,$$

ou seja, $\sin 12^\circ \approx 0,207912$ com seis casas decimais.

(b) O erro é menor que 0,00005 se

$$\frac{|x|^7}{5040} < 0,00005 \iff |x|^7 < 0,252 \iff |x| < (0,252)^{1/7} \approx 0,821.$$

A aproximação tem precisão de 0,00005 quando $|x| < 0,82$. O gráfico do erro verdadeiro $|\sin x - T_5(x)|$ (Figura 13) confirma: ele fica abaixo de 0,00005 para $|x| < 0,82$. ■

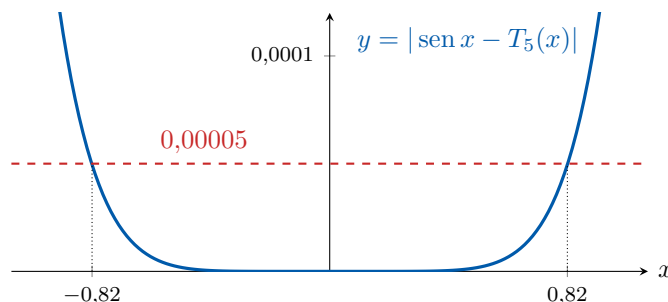


Figura 13: O erro $|\sin x - T_5(x)|$ fica abaixo de 0,00005 (reta tracejada) para $|x| < 0,82$.

Aplicações à física

Na Seção 3.10 vimos que, na dedução da fórmula do período de um pêndulo, a aceleração tangencial $a_T = -g \sin \theta$ é simplificada trocando $\sin \theta$ por θ . Agora entendemos melhor essa aproximação: pela série do seno,

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots,$$

e $\sin \theta \approx \theta$ é o polinômio de Taylor $T_1(\theta) = T_2(\theta)$. Pela Desigualdade de Taylor com $n = 2$ e $M = 1$, o erro satisfaz

$$|\sin \theta - \theta| \leq \frac{|\theta|^3}{3!} = \frac{|\theta|^3}{6}.$$

Para $\theta = 20^\circ \approx 0,349$ rad, isso dá um erro de no máximo 0,0071 (o erro verdadeiro é 0,0070), cerca de 2% de $\sin 20^\circ \approx 0,342$; para $\theta = 10^\circ$ o erro cai para cerca de 0,5%. Quando se deseja mais precisão, os físicos usam o termo seguinte, $\sin \theta \approx \theta - \theta^3/6$. Do mesmo modo, a óptica gaussiana troca $\cos \theta$ por $T_1 = 1$ (e, numa teoria mais precisa, por $T_2 = 1 - \theta^2/2$).

Polinômios de Taylor e limites

Os polinômios de Taylor também permitem calcular limites indeterminados, muitas vezes de forma mais transparente que a Regra de l'Hôpital.

Exemplo 3. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ (a) pela Regra de l'Hôpital e (b) usando o polinômio de Taylor do seno.

Solução. (a) O limite é do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de l'Hôpital três vezes (cada limite intermediário ainda é do tipo $\frac{0}{0}$),

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}.$$

- (b) Escrevemos $\sin x = T_4(x) + R_4(x)$, com $T_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$ (o termo de grau 4 é nulo) e, pela Desigualdade de Taylor com $M = 1$, $|R_4(x)| \leq |x|^5/5!$. Então

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{6} + R_4(x)}{x^3} = -\frac{1}{6} + \frac{R_4(x)}{x^3}, \quad \left| \frac{R_4(x)}{x^3} \right| \leq \frac{x^2}{120} \rightarrow 0.$$

Logo o limite é $-\frac{1}{6}$. A conta mostra mais: para x perto de 0, $\sin x - x \approx -x^3/6$. (Numericamente, para $x = 0,01$ o quociente vale $-0,1666658\dots$) ■

Exemplo 4. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Solução. Pela série de e^x ,

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \dots \rightarrow \frac{1}{2}.$$

(Para justificar sem manipular a série inteira, use $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + R_2(x)$ com $|R_2(x)| \leq e|x|^3/3!$ para $|x| \leq 1$, como no Exemplo 2 das séries de Taylor.) Pela Regra de l'Hôpital, aplicada duas vezes, chega-se ao mesmo valor:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$