

Lista de Exercícios 3 — FUV

Exercícios

1. Encontre os números críticos da função $F(x) = x^{4/5}(x - a)^2$, em que $a > 0$.
2. Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de $f(t) = t\sqrt{a^2 - t^2}$ no intervalo $[-\frac{a}{2}, a]$, em que $a > 0$.
3. Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de $f(t) = t + \cotg(t/2)$ no intervalo $[\pi/4, 7\pi/4]$.
4. Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = xe^{-x^2/(2a^2)}$ no intervalo $[-\frac{a}{2}, 2a]$, em que $a > 0$.
5. Se a e b são números positivos, encontre o valor máximo de $f(x) = x^a(1 - x)^b$ no intervalo $0 \leq x \leq 1$.
6. Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = x\sqrt{ax - x^2}$, em que $a > 0$, no seu domínio.
7. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força que age ao longo de uma corda atada a ele. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu mg}{\mu \sin \theta + \cos \theta},$$

em que $\mu > 0$ é o *coeficiente de atrito* e $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Mostre que F é minimizada quando $\tan \theta = \mu$ e encontre o valor mínimo de F .

8. Quando um objeto estranho se aloja na traqueia, o diafragma o empurra para cima, provocando a tosse, e a traqueia se contrai, fazendo o ar sair mais depressa. Pelo modelo matemático da tosse, a velocidade v do ar está relacionada ao raio r da traqueia por

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2, \quad \frac{1}{2}r_0 \leq r \leq r_0,$$

em que $k > 0$ é uma constante e r_0 é o raio normal da traqueia.

- (a) Determine o valor de r no intervalo $[\frac{1}{2}r_0, r_0]$ em que v tem um máximo absoluto. Sabe-se, por raios X, que o raio da traqueia se contrai para cerca de $2/3$ do raio normal durante a tosse. O resultado é compatível com isso?
 - (b) Quais são os valores máximo e mínimo absolutos de v nesse intervalo?
9. Sejam m e n inteiros positivos. Demonstre que a função

$$f(x) = x^{2m+1} + x^{2n+1} + x + 1$$

não tem máximo local nem mínimo local.

10. Uma função cúbica é um polinômio de grau 3, isto é, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$.
- (a) Mostre que uma função cúbica pode ter dois, um ou nenhum número crítico, e diga em termos de a , b e c quando ocorre cada caso. Dê exemplos dos três casos.
- (b) Quantos valores extremos locais uma função cúbica pode ter?
11. Verifique que $f(x) = \frac{x}{x+a}$, com $a > 0$, satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo $[p, q]$, em que $0 \leq p < q$. Em seguida, encontre todos os números c que satisfazem a conclusão do teorema.
12. Mostre que, se $a > 1$, a equação $ax + \cos x = 0$ tem exatamente uma raiz real.
13. Sejam $0 < a < k$. Mostre que a equação $x^3 - 3k^2x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo $[-a, a]$, qualquer que seja a constante c .
14. Mostre que a equação $x^4 + bx + c = 0$ tem no máximo duas raízes reais, quaisquer que sejam as constantes b e c .
15. (a) Suponha que f seja derivável em $\mathbb{R}$ e tenha duas raízes. Mostre que f' tem pelo menos uma raiz.
- (b) Suponha que f seja duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ e tenha três raízes. Mostre que f'' tem pelo menos uma raiz real.
- (c) Você pode generalizar os itens (a) e (b)?
16. Seja f derivável no intervalo $[a, c]$, com $f(a) = b$ e $f'(x) \geq m$ para $a \leq x \leq c$. Quanto pequeno $f(c)$ pode ser?
17. Mostre que, se $0 < r < 1$, então

$$(1+x)^r < 1+rx \quad \text{para todo } x > 0.$$

Em particular, $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ se $x > 0$.

18. Use o Teorema do Valor Médio para demonstrar a desigualdade

$$|\sin a - \sin b| \leq |a - b| \quad \text{para todos } a \text{ e } b.$$

19. Demonstre a identidade

$$\arcsen \frac{x-1}{x+1} = 2 \arctg \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}, \quad x \geq 0.$$

20. Um número a é chamado *ponto fixo* de uma função f se $f(a) = a$. Seja f derivável em $\mathbb{R}$. Mostre que, se $f'(x) \neq 1$ para todo número real x , então f tem no máximo um ponto fixo.
21. Seja $f(x) = x^4(x-a)^3$, em que $a > 0$.
- (a) Encontre os números críticos de f .
- (b) O que o Teste da Segunda Derivada mostra sobre o comportamento de f nesses números críticos?
- (c) O que mostra o Teste da Primeira Derivada?

22. Considere a família de curvas $y = x^3 - 3a^2x + 2a^3$, em que a é uma constante positiva. Encontre os intervalos de crescimento e de decrescimento, os valores máximo e mínimo locais, os intervalos de concavidade e o ponto de inflexão. O que os membros dessa família têm em comum? Como eles diferem entre si?

23. A família de curvas em forma de sino

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

aparece em probabilidade e estatística, com o nome de *função densidade normal*. A constante μ é a *média* e a constante positiva σ é o *desvio padrão*. Por simplicidade, mudamos a escala para remover o fator $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ e analisamos o caso $\mu = 0$, isto é,

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}.$$

- (a) Encontre a assíntota, o valor máximo e os pontos de inflexão de f .
 (b) Que papel σ desempenha na forma da curva?
24. Sejam $p < q$ e $M > m$. Encontre uma função cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenha um valor máximo local M em $x = p$ e um valor mínimo local m em $x = q$.
25. Sejam $p > 0$ e $q > 0$. Para quais valores de a e b a função $f(x) = ax e^{bx^2}$ tem o valor máximo $f(p) = q$?

26. Mostre que a curva $y = \frac{1+x}{1+x^2}$ tem três pontos de inflexão e que todos estão sobre uma mesma reta.

27. (a) Mostre que $e^x \geq 1 + x$ para $x \geq 0$.
 (b) Deduza que $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ para $x \geq 0$.
 (c) Use indução matemática para demonstrar que, para $x \geq 0$ e qualquer inteiro positivo n ,

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

28. Mostre que uma função cúbica sempre tem exatamente um ponto de inflexão. Se seu gráfico corta o eixo x em três pontos, de abscissas x_1 , x_2 e x_3 , mostre que a abscissa do ponto de inflexão é $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.
29. Seja b uma constante. Para quais valores de c o polinômio $P(x) = x^4 + cx^3 + bx^2$ tem dois pontos de inflexão? E um ponto de inflexão? E nenhum?

30. Seja $a > 0$. Para quais valores de c a função

$$f(x) = cx + \frac{1}{x^2 + a^2}$$

é crescente em $(-\infty, \infty)$?

31. Calcule, para uma constante a ,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - ax + a - 1}{(x - 1)^2}.$$

32. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}.$$

33. Calcule, para uma constante a , $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos ax)^{1/x^2}$.

34. Uma bola de metal de massa m é lançada na água, e a força de resistência é proporcional ao quadrado da velocidade. A distância que a bola percorreu até o instante t é

$$s(t) = \frac{m}{c} \ln \cosh \left(\sqrt{\frac{gc}{m}} t \right),$$

em que c é uma constante positiva e g é a aceleração da gravidade. Lembre que $\cosh u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$ e $\sinh u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$, de modo que $(\cosh u)' = \sinh u$ e $(\sinh u)' = \cosh u$. Encontre $\lim_{c \rightarrow 0^+} s(t)$ e interprete o resultado.

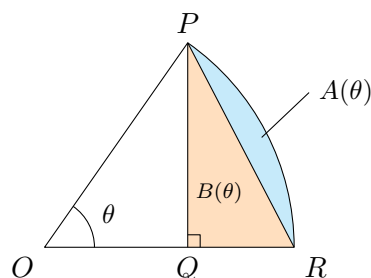
35. A primeira aparição impressa da Regra de l'Hôpital foi no livro *Analyse des infiniment petits*, publicado pelo marquês de l'Hôpital em 1696. O exemplo que ele usou para ilustrar a regra foi encontrar o limite da função

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

quando x tende a a , em que $a > 0$. (Naquela época era comum escrever aa no lugar de a^2 .) Resolva esse problema.

36. Em uma circunferência de centro O e raio r , sejam P e R dois pontos tais que o ângulo central POR mede θ , com $0 < \theta < \pi/2$, e seja Q o pé da perpendicular baixada de P sobre o raio OR (veja a figura). Seja $A(\theta)$ a área do segmento circular entre a corda PR e o arco PR , e seja $B(\theta)$ a área do triângulo PQR . Encontre

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}.$$



37. Calcule, para uma constante a ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ax - x^2 \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) \right].$$

38. Seja $k \neq 0$ uma constante. Para quais valores de a e b vale a igualdade a seguir?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin kx}{x^3} + a + \frac{b}{x^2} \right) = 0$$

39. Se f'' for contínua, mostre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

40. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Use a definição de derivada para calcular $f'(0)$.

- (b) Mostre que f tem derivadas de todas as ordens, definidas em $\mathbb{R}$. [Dica: primeiro mostre, por indução, que há um polinômio $p_n(x)$ e um inteiro não negativo k_n tais que $f^{(n)}(x) = p_n(x)f(x)/x^{k_n}$ para $x \neq 0$.]
- (c) Conclua que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n . O que isso diz sobre os polinômios de Taylor de f centrados em 0 (veja o Exercício 43)?

41. A aproximação linear $L(x)$ é a melhor aproximação de primeiro grau de $f(x)$ perto de $x = a$, porque f e L têm o mesmo valor e a mesma derivada em a . Para obter uma aproximação melhor, procuramos uma função quadrática P tal que

$$(i) \ P(a) = f(a), \quad (ii) \ P'(a) = f'(a), \quad (iii) \ P''(a) = f''(a).$$

- (a) Escrevendo $P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2$, mostre que a função quadrática que satisfaz (i), (ii) e (iii) é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2.$$

- (b) Encontre a aproximação quadrática $P(x)$ de $f(x) = \cos kx$ perto de $a = 0$, em que k é uma constante. Compare-a com a aproximação linear $L(x)$ no mesmo ponto.

42. Seja $f(x) = \sqrt{x + b}$, e seja a um número com $a + b > 0$.

- (a) Encontre a aproximação linear $L(x)$ e a aproximação quadrática $P(x)$ de f perto de a .
- (b) Para $b = 3$ e $a = 1$, compare os valores de L , P e f em $x = 1,2$. O que você conclui?

43. Para aproximar f perto de a melhor do que com as aproximações linear e quadrática, procuramos um polinômio de grau n

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que T_n e suas n primeiras derivadas tenham, em $x = a$, os mesmos valores que f e suas n primeiras derivadas.

- (a) Derivando repetidamente e fazendo $x = a$, mostre que essas condições são satisfeitas se e somente se

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

O polinômio resultante,

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n,$$

é o **polinômio de Taylor de grau n de f centrado em a** . A soma infinita correspondente é a **série de Taylor** de f centrada em a ; quando $a = 0$, ela se chama **série de Maclaurin**.

- (b) Encontre T_3 para $f(x) = x^3$ centrado em um número a qualquer e verifique, expandindo as potências, que $T_3(x) = x^3$.

44. (a) Encontre o polinômio de Taylor T_8 da função $f(x) = \cos x$ centrado em $a = 0$.

- (b) Encontre uma fórmula para T_{2n} e escreva a série de Maclaurin de $\cos x$. Explique por que $T_{2n+1} = T_{2n}$.

- (c) Encontre a série de Maclaurin de $g(x) = \sin bx$, em que $b \neq 0$ é uma constante.

45. (a) Encontre a série de Maclaurin de $f(x) = e^{ax}$, em que a é uma constante.
- (b) Mostre, por indução, que a função $g(x) = x e^x$ satisfaz $g^{(n)}(x) = (x + n) e^x$, e use isso para encontrar a série de Maclaurin de g . Compare o resultado com o produto de x pela série de Maclaurin de e^x .



WARNING:

You can't unsee what
you are about to see

Apêndice — Soluções da Lista 3

1. A função está definida em toda a reta, pois $x^{4/5} = (\sqrt[5]{x})^4$. Pela Regra do Produto:

$$F'(x) = \frac{4}{5} x^{-1/5} (x-a)^2 + 2x^{4/5} (x-a) = x^{-1/5} (x-a) \left[\frac{4}{5} (x-a) + 2x \right] = \frac{2(x-a)(7x-2a)}{5\sqrt[5]{x}}.$$

$F'(x) = 0$ quando $x = a$ ou $x = 2a/7$, e $F'(0)$ não existe, embora $F(0)$ esteja definido. Os números críticos são

$$0, \quad \frac{2a}{7} \quad \text{e} \quad a.$$

Por exemplo, para $a = 4$ eles são 0 , $\frac{8}{7}$ e 4 .

2. A função é contínua em $[-\frac{a}{2}, a]$, de modo que podemos usar o Método do Intervalo Fechado. Para $|t| < a$:

$$f'(t) = \sqrt{a^2 - t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \frac{a^2 - 2t^2}{\sqrt{a^2 - t^2}}.$$

$f'(t) = 0$ quando $t = \pm a/\sqrt{2}$. Só $t = a/\sqrt{2}$ está no intervalo, pois $-a/\sqrt{2} \approx -0,71a < -a/2$. Comparando os valores no número crítico e nas extremidades:

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \quad f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{2}, \quad f(a) = 0.$$

O valor máximo absoluto é $a^2/2$, em $t = a/\sqrt{2}$, e o mínimo absoluto é $-\sqrt{3}a^2/4$, em $t = -a/2$.

3. No intervalo, $t/2 \in [\pi/8, 7\pi/8]$, onde $\sin(t/2) > 0$; logo f é contínua em $[\pi/4, 7\pi/4]$. Derivando:

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{t}{2}.$$

$f'(t) = 0$ quando $\sin^2(t/2) = \frac{1}{2}$, isto é, $\sin(t/2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $t/2 = \pi/4$ ou $t/2 = 3\pi/4$, ou seja, $t = \pi/2$ ou $t = 3\pi/2$. Para as extremidades, usamos $\cotg \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos(\pi/4)}{\sin(\pi/4)} = \sqrt{2} + 1$ e $\cotg \frac{7\pi}{8} = -\cotg \frac{\pi}{8}$:

t	$f(t)$	valor aproximado
$\pi/4$	$\pi/4 + 1 + \sqrt{2}$	3,20
$\pi/2$	$\pi/2 + 1$	2,57
$3\pi/2$	$3\pi/2 - 1$	3,71
$7\pi/4$	$7\pi/4 - 1 - \sqrt{2}$	3,08

O valor máximo absoluto é $\frac{3\pi}{2} - 1$ e o mínimo absoluto é $\frac{\pi}{2} + 1$.

4. A função é contínua e

$$f'(x) = e^{-x^2/(2a^2)} + x \cdot \left(-\frac{x}{a^2}\right) e^{-x^2/(2a^2)} = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) e^{-x^2/(2a^2)}.$$

Como a exponencial nunca se anula, $f'(x) = 0$ quando $x = \pm a$; só $x = a$ está no intervalo. Os valores a comparar são

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{2} e^{-1/8} \approx -0,441a, \quad f(a) = a e^{-1/2} \approx 0,607a, \quad f(2a) = 2a e^{-2} \approx 0,271a.$$

O valor máximo absoluto é $a/\sqrt{e}$, em $x = a$, e o mínimo absoluto é $-\frac{a}{2} e^{-1/8}$, em $x = -a/2$. (No livro, $a = 2$ e o intervalo é $[-1, 4]$.)

5. A função é contínua em $[0, 1]$, vale 0 nas extremidades e é positiva em $(0, 1)$; logo o máximo ocorre em um número crítico do interior. Para $0 < x < 1$:

$$f'(x) = ax^{a-1}(1-x)^b - bx^a(1-x)^{b-1} = x^{a-1}(1-x)^{b-1} [a(1-x) - bx].$$

O único zero no interior é $x = \frac{a}{a+b}$, em que $1-x = \frac{b}{a+b}$. O valor máximo é

$$f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}.$$

6. O domínio é dado por $ax - x^2 = x(a-x) \geq 0$, isto é, $[0, a]$; nele f é contínua e $f \geq 0$. Para $0 < x < a$:

$$f'(x) = \sqrt{ax - x^2} + \frac{x(a-2x)}{2\sqrt{ax - x^2}} = \frac{2(ax - x^2) + ax - 2x^2}{2\sqrt{ax - x^2}} = \frac{x(3a - 4x)}{2\sqrt{ax - x^2}}.$$

O único número crítico no interior é $x = 3a/4$. Comparando:

$$f(0) = f(a) = 0, \quad f\left(\frac{3a}{4}\right) = \frac{3a}{4} \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{9a^2}{16}} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{16} a^2.$$

O valor máximo absoluto é $\frac{3\sqrt{3}}{16} a^2$ e o mínimo absoluto é 0.

7. Seja $g(\theta) = \mu \sin \theta + \cos \theta$. Em $[0, \pi/2]$ temos $g(\theta) > 0$, pois $\sin \theta$ e $\cos \theta$ não são negativos e não se anulam juntos. Como o numerador μmg é constante e positivo, F é mínima onde g é máxima. A função g é contínua em $[0, \pi/2]$ e

$$g'(\theta) = \mu \cos \theta - \sin \theta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{tg} \theta = \mu.$$

Como $\mu > 0$, há um único número crítico $\theta^* = \operatorname{arctg} \mu$ em $(0, \pi/2)$, com $\cos \theta^* = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$ e $\sin \theta^* = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$. Então

$$g(\theta^*) = \frac{\mu^2 + 1}{\sqrt{1+\mu^2}} = \sqrt{1+\mu^2}, \quad g(0) = 1, \quad g(\pi/2) = \mu.$$

Os dois valores nas extremidades são menores que $\sqrt{1+\mu^2}$, de modo que o máximo de g ocorre em θ^* . Portanto F é mínima quando $\operatorname{tg} \theta = \mu$, e o valor mínimo é

$$F(\theta^*) = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

8. (a) Como $v(r) = k(r_0 r^2 - r^3)$,

$$v'(r) = k(2r_0 r - 3r^2) = kr(2r_0 - 3r).$$

No intervalo, $v'(r) = 0$ só em $r = \frac{2}{3}r_0$. Comparando com as extremidades:

$$v\left(\frac{1}{2}r_0\right) = k \cdot \frac{r_0}{2} \cdot \frac{r_0^2}{4} = \frac{kr_0^3}{8}, \quad v\left(\frac{2}{3}r_0\right) = k \cdot \frac{r_0}{3} \cdot \frac{4r_0^2}{9} = \frac{4kr_0^3}{27}, \quad v(r_0) = 0.$$

Como $\frac{4}{27} \approx 0,148 > \frac{1}{8}$, o máximo absoluto ocorre em $r = \frac{2}{3}r_0$. Isso concorda com a evidência experimental: a traqueia se contrai justamente para o raio que maximiza a velocidade do ar.

(b) O valor máximo absoluto é $\frac{4}{27}kr_0^3$ e o mínimo absoluto é 0, em $r = r_0$.

9. A função é um polinômio, logo é derivável em toda parte, e

$$f'(x) = (2m+1)x^{2m} + (2n+1)x^{2n} + 1 \geq 1,$$

pois as potências pares x^{2m} e x^{2n} nunca são negativas. Se f tivesse um máximo ou mínimo local em c , o Teorema de Fermat daria $f'(c) = 0$, o que é impossível. Logo f não tem extremos locais. (No livro, $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$.)

10. (a) Os números críticos de um polinômio são as raízes de

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,$$

uma função quadrática com discriminante $4b^2 - 12ac = 4(b^2 - 3ac)$. Há dois números críticos se $b^2 > 3ac$, um se $b^2 = 3ac$ e nenhum se $b^2 < 3ac$. Exemplos: $f(x) = x^3 - 3x$ tem dois (± 1), $f(x) = x^3$ tem um (0) e $f(x) = x^3 + x$ não tem nenhum, pois $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$.

(b) Se f' tem duas raízes distintas, ela muda de sinal em cada uma delas, e pelo Teste da Primeira Derivada há um máximo local e um mínimo local. Se f' tem uma raiz dupla r , então $f'(x) = 3a(x-r)^2$ não muda de sinal e não há extremo; se f' não tem raízes, seu sinal é constante. Portanto uma função cúbica tem dois valores extremos locais ou nenhum.

11. O denominador $x+a$ é positivo em $[p, q]$, pois $p \geq 0$ e $a > 0$. Logo f , que é uma função racional, é contínua em $[p, q]$ e derivável em (p, q) , com

$$f'(x) = \frac{(x+a) - x}{(x+a)^2} = \frac{a}{(x+a)^2}.$$

A inclinação da reta secante é

$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} = \frac{1}{q - p} \cdot \frac{q(p+a) - p(q+a)}{(p+a)(q+a)} = \frac{a}{(p+a)(q+a)}.$$

A condição $f'(c) = \frac{a}{(p+a)(q+a)}$ dá $(c+a)^2 = (p+a)(q+a)$ e, como $c+a > 0$,

$$c = \sqrt{(p+a)(q+a)} - a.$$

Esse número está em (p, q) , pois a média geométrica $\sqrt{(p+a)(q+a)}$ fica estritamente entre $p+a$ e $q+a$. Por exemplo, para $a = 2$ no intervalo $[1, 4]$ obtemos $c = \sqrt{18} - 2 = 3\sqrt{2} - 2 \approx 2,24$.

12. Seja $f(x) = ax + \cos x$, contínua e derivável em $\mathbb{R}$.

Existência: $f(0) = 1 > 0$ e $f(-1) = -a + \cos 1 < 0$, pois $\cos 1 < 1 < a$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, há uma raiz em $(-1, 0)$.

Unicidade: suponha que houvesse duas raízes $r_1 < r_2$. Como $f(r_1) = f(r_2) = 0$, o Teorema de Rolle daria $c \in (r_1, r_2)$ com $f'(c) = 0$. Mas

$$f'(x) = a - \sin x \geq a - 1 > 0$$

para todo x . Contradição. Logo a raiz é única.

13. Seja $f(x) = x^3 - 3k^2x + c$. Suponha que houvesse duas raízes $r_1 < r_2$ em $[-a, a]$. Como f é um polinômio, o Teorema de Rolle se aplica em $[r_1, r_2]$ e dá um número $s \in (r_1, r_2)$ com $f'(s) = 0$. Mas $|s| < a < k$, logo

$$f'(s) = 3(s^2 - k^2) < 0.$$

Contradição. Portanto há no máximo uma raiz em $[-a, a]$. (No livro, $3k^2 = 15$ e $a = 2 < \sqrt{5}$.)

14. Seja $f(x) = x^4 + bx + c$. Sua derivada, $f'(x) = 4x^3 + b$, tem exatamente uma raiz real, $x = -\sqrt[3]{b/4}$, pois $x \mapsto x^3$ é crescente. Suponha que f tivesse três raízes reais $r_1 < r_2 < r_3$. Aplicando o Teorema de Rolle em $[r_1, r_2]$ e em $[r_2, r_3]$, obteríamos dois números distintos $s_1 \in (r_1, r_2)$ e $s_2 \in (r_2, r_3)$ com $f'(s_1) = f'(s_2) = 0$. Contradição. Logo f tem no máximo duas raízes reais.
15. (a) Sejam $a < b$ as raízes. Como f é derivável em $\mathbb{R}$, ela é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , e $f(a) = f(b) = 0$. Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ com $f'(c) = 0$.
- (b) Sejam $a < b < c$ as raízes. Pelo item (a), aplicado em $[a, b]$ e em $[b, c]$, existem $r \in (a, b)$ e $s \in (b, c)$ com $f'(r) = f'(s) = 0$, e $r < s$. Como f' é derivável, o item (a), aplicado a f' em $[r, s]$, dá $t \in (r, s)$ com $f''(t) = 0$.
- (c) Se f é n vezes derivável em $\mathbb{R}$ e tem $n + 1$ raízes distintas, então $f^{(n)}$ tem pelo menos uma raiz real. De fato, aplicando o argumento acima repetidamente, $f^{(k)}$ tem pelo menos $n + 1 - k$ raízes distintas, para $k = 0, 1, \dots, n$.
16. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in (a, c)$ tal que $f(c) - f(a) = f'(\xi)(c - a)$. Como $f'(\xi) \geq m$ e $c - a > 0$:

$$f(c) = b + f'(\xi)(c - a) \geq b + m(c - a).$$

Esse valor é atingido pela função $f(x) = b + m(x - a)$, de modo que o menor valor possível de $f(c)$ é $b + m(c - a)$. (No livro, $f(1) = 10$, $f' \geq 2$ e $c = 4$: o menor valor é 16.)

17. Seja $f(t) = (1 + t)^r$, contínua e derivável para $t > -1$, com $f'(t) = r(1 + t)^{r-1}$. Dado $x > 0$, o Teorema do Valor Médio em $[0, x]$ fornece $c \in (0, x)$ tal que

$$(1 + x)^r - 1 = f(x) - f(0) = r(1 + c)^{r-1}x.$$

Como $1 + c > 1$ e $r - 1 < 0$, temos $(1 + c)^{r-1} < 1$. Como $rx > 0$,

$$(1 + x)^r - 1 < rx, \quad \text{isto é,} \quad (1 + x)^r < 1 + rx.$$

Com $r = \frac{1}{2}$ obtemos $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{1}{2}x$.

18. Se $a = b$, os dois lados valem 0. Se $a \neq b$, a função seno é contínua e derivável em toda parte; pelo Teorema do Valor Médio no intervalo de extremidades a e b , existe c entre eles tal que

$$\sin a - \sin b = \cos c(a - b).$$

Tomando valores absolutos e usando $|\cos c| \leq 1$:

$$|\sin a - \sin b| = |\cos c| |a - b| \leq |a - b|.$$

19. Seja $f(x) = \arcsen \frac{x-1}{x+1} - 2 \arctg \sqrt{x} + \frac{\pi}{2}$. Para $x > 0$, temos $-1 < u = \frac{x-1}{x+1} < 1$ e

$$u' = \frac{2}{(x+1)^2}, \quad 1 - u^2 = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{4x}{(x+1)^2}.$$

Logo

$$\frac{d}{dx} \arcsen u = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$$

e

$$\frac{d}{dx} 2 \arctg \sqrt{x} = \frac{2}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

Assim $f'(x) = 0$ para todo $x > 0$, e f é constante em $(0, \infty)$. Como $f(1) = \arcsen 0 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 0$, temos $f(x) = 0$ para $x > 0$. Em $x = 0$ a identidade vale diretamente: $\arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2} = 2 \arctg 0 - \frac{\pi}{2}$.

20. Suponha que f tivesse dois pontos fixos $a < b$, isto é, $f(a) = a$ e $f(b) = b$. Como f é derivável em $\mathbb{R}$, o Teorema do Valor Médio em $[a, b]$ dá $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b - a}{b - a} = 1,$$

contrariando a hipótese $f'(x) \neq 1$. Logo há no máximo um ponto fixo.

21. (a) Pela Regra do Produto:

$$f'(x) = 4x^3(x-a)^3 + 3x^4(x-a)^2 = x^3(x-a)^2(7x-4a).$$

Os números críticos são 0 , $\frac{4a}{7}$ e a .

- (b) Escreva $f' = uvw$, com $u = x^3$, $v = (x-a)^2$ e $w = 7x-4a$, de modo que $f'' = u'vw + uv'w + uvw'$. Em $x = 0$ anulam-se u e $u' = 3x^2$; em $x = a$ anulam-se v e $v' = 2(x-a)$; em $x = 4a/7$ anula-se w , e resta só $uvw' = 7uv$. Assim:

$$f''(0) = 0, \quad f''(a) = 0, \quad f''\left(\frac{4a}{7}\right) = 7\left(\frac{4a}{7}\right)^3\left(\frac{4a}{7} - a\right)^2 = \frac{576}{2401}a^5 > 0.$$

Portanto f tem um mínimo local em $x = 4a/7$, e o Teste da Segunda Derivada é inconclusivo em 0 e em a .

- (c) Como $(x-a)^2 \geq 0$, o sinal de f' é o de $x^3(7x-4a)$:

Intervalo	x^3	$7x-4a$	f'
$x < 0$	—	—	+
$0 < x < 4a/7$	+	—	—
$4a/7 < x < a$	+	+	+
$x > a$	+	+	+

Logo f tem um máximo local $f(0) = 0$ em $x = 0$, um mínimo local $f\left(\frac{4a}{7}\right) = -\frac{6912}{823543}a^7$ em $x = 4a/7$, e não tem extremo em $x = a$, onde f' não muda de sinal.

22. Temos $y' = 3x^2 - 3a^2 = 3(x-a)(x+a)$ e $y'' = 6x$.

- $y' > 0$ para $|x| > a$ e $y' < 0$ para $|x| < a$: a função é crescente em $(-\infty, -a)$ e em (a, ∞) e decrescente em $(-a, a)$.

- Há um máximo local em $x = -a$, com $y(-a) = -a^3 + 3a^3 + 2a^3 = 4a^3$, e um mínimo local em $x = a$, com $y(a) = a^3 - 3a^3 + 2a^3 = 0$.
- A curva é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e côncava para cima em $(0, \infty)$; o ponto de inflexão é $(0, 2a^3)$.

Note que $y = (x - a)^2(x + 2a)$. Todos os membros da família têm a mesma forma: tocam o eixo x no mínimo local $(a, 0)$, cortam-no em $x = -2a$ e têm o ponto de inflexão sobre o eixo y . De fato, $y = a^3 F(x/a)$ com $F(u) = u^3 - 3u + 2$: cada curva é a curva $y = F(x)$ ampliada pelo fator a na horizontal e pelo fator a^3 na vertical. Quando a cresce, os pontos de máximo e mínimo se afastam da origem, e o máximo local $4a^3$ cresce rapidamente.

- 23.** (a) Como $-x^2/(2\sigma^2) \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, temos $f(x) \rightarrow 0$: a reta $y = 0$ é assíntota horizontal. Derivando:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, \quad f''(x) = \left(\frac{x^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} \right) e^{-x^2/(2\sigma^2)} = \frac{x^2 - \sigma^2}{\sigma^4} e^{-x^2/(2\sigma^2)}.$$

f' é positiva para $x < 0$ e negativa para $x > 0$; o valor máximo é $f(0) = 1$. f'' é negativa para $|x| < \sigma$ e positiva para $|x| > \sigma$, de modo que os pontos de inflexão são $(\pm\sigma, e^{-1/2})$.

- (b) Os pontos de inflexão estão em $x = \pm\sigma$: σ mede a largura do sino. Quanto maior σ , mais larga e achatada é a curva; quanto menor, mais estreita e concentrada perto de $x = 0$.

- 24.** As condições são $f'(p) = f'(q) = 0$, $f(p) = M$ e $f(q) = m$. Como f' é quadrática com raízes p e q :

$$f'(x) = 3a(x - p)(x - q) = 3ax^2 - 3a(p + q)x + 3apq.$$

Comparando com $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$:

$$b = -\frac{3a(p + q)}{2}, \quad c = 3apq.$$

Com esses valores, um cálculo direto dá

$$\begin{aligned} f(p) - f(q) &= a \left[(p^3 - q^3) - \frac{3}{2}(p + q)(p^2 - q^2) + 3pq(p - q) \right] \\ &= a(p - q) \left[p^2 + pq + q^2 - \frac{3}{2}(p + q)^2 + 3pq \right] = -\frac{a}{2}(p - q)^3 = \frac{a}{2}(q - p)^3. \end{aligned}$$

A condição $f(p) - f(q) = M - m$ dá

$$a = \frac{2(M - m)}{(q - p)^3} > 0,$$

e $f(q) = m$ dá $d = m - \frac{a}{2} q^2(3p - q)$. Como $a > 0$ e $p < q$, f' é positiva fora de $[p, q]$ e negativa em (p, q) ; logo p é de fato um máximo local e q um mínimo local. No livro, $p = -2$, $M = 3$, $q = 1$ e $m = 0$, o que dá

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 12x + 7}{9}.$$

- 25.** Pela Regra do Produto e pela Regra da Cadeia,

$$f'(x) = a e^{bx^2} + ax \cdot 2bx e^{bx^2} = a e^{bx^2} (1 + 2bx^2).$$

Para que $f'(p) = 0$ é preciso $1 + 2bp^2 = 0$, isto é, $b = -\frac{1}{2p^2}$. Então

$$f(p) = ap e^{-1/2} = q \implies a = \frac{q\sqrt{e}}{p}.$$

Com esses valores, $a > 0$ e o sinal de f' é o de $1 - x^2/p^2$: positivo para $|x| < p$ e negativo para $|x| > p$. Logo $f(p) = q$ é de fato o valor máximo. No livro, $p = 2$ e $q = 1$: $a = \frac{1}{2}\sqrt{e}$ e $b = -\frac{1}{8}$.

26. Pela Regra do Quociente:

$$y' = \frac{(1+x^2) - (1+x)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2},$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(-2-2x)(1+x^2)^2 - (1-2x-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{(-2-2x)(1+x^2) - 4x(1-2x-x^2)}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(1+x^2)^3} = \frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

O numerador tem três raízes simples, $x = 1$ e $x = -2 \pm \sqrt{3}$, e y'' muda de sinal em cada uma delas: há três pontos de inflexão. Para calcular as ordenadas, note que $1+x^2 = 8 \mp 4\sqrt{3}$ quando $x = -2 \pm \sqrt{3}$:

$$y(1) = 1, \quad y(-2+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}-1}{4(2-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}}{4},$$

$$y(-2-\sqrt{3}) = \frac{-1-\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})} = \frac{1-\sqrt{3}}{4}.$$

(Para simplificar, multiplique numerador e denominador por $2 \pm \sqrt{3}$, usando $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$.) Os três pontos satisfazem $y = \frac{x+3}{4}$; por exemplo, $\frac{(-2+\sqrt{3})+3}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$. Logo estão sobre essa reta.

- 27.** (a) Seja $g(x) = e^x - 1 - x$. Então $g(0) = 0$ e $g'(x) = e^x - 1 > 0$ para $x > 0$. Pelo Teste Crescente/Decrescente, g é crescente em $[0, \infty)$, logo $g(x) \geq g(0) = 0$, isto é, $e^x \geq 1 + x$.
- (b) Seja $h(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$. Então $h(0) = 0$ e $h'(x) = e^x - 1 - x \geq 0$ para $x \geq 0$, pelo item (a). Logo h é crescente em $[0, \infty)$ e $h(x) \geq 0$.
- (c) Seja $T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$. Para $n = 0$ a desigualdade $e^x \geq 1$ vale para $x \geq 0$. Suponha que $e^x \geq T_n(x)$ para $x \geq 0$ e seja $g_{n+1}(x) = e^x - T_{n+1}(x)$. Como a derivada de $\frac{x^k}{k!}$ é $\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$, temos $T'_{n+1} = T_n$ e

$$g'_{n+1}(x) = e^x - T_n(x) \geq 0 \quad \text{para } x \geq 0.$$

Como $g_{n+1}(0) = 0$, segue que $g_{n+1}(x) \geq 0$ para $x \geq 0$, o que completa a indução. Os polinômios T_n são os polinômios de Taylor de e^x (veja o Exercício 45).

28. Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$, então $f''(x) = 6ax + 2b$ é uma função afim não constante. Ela se anula apenas em $x = -b/(3a)$ e muda de sinal ali; logo há exatamente um ponto de inflexão. Se o gráfico corta o eixo x em x_1, x_2 e x_3 , então

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= a \left[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 \right]. \end{aligned}$$

Daí $f''(x) = a[6x - 2(x_1 + x_2 + x_3)]$, que se anula em $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$.

29. A segunda derivada é

$$P''(x) = 12x^2 + 6cx + 2b = 2(6x^2 + 3cx + b),$$

cujo fator quadrático tem discriminante $9c^2 - 24b = 3(3c^2 - 8b)$.

- Se $3c^2 > 8b$, P'' tem duas raízes simples e muda de sinal em cada uma: há dois pontos de inflexão.
- Se $3c^2 < 8b$, $P'' > 0$ em toda parte: o gráfico é sempre côncavo para cima e não há pontos de inflexão.
- Se $3c^2 = 8b$, $P''(x) = 12(x + \frac{c}{4})^2 \geq 0$ não muda de sinal: também não há pontos de inflexão.

Portanto nunca há exatamente um ponto de inflexão. No livro, $b = 1$: há dois pontos de inflexão se $|c| > \sqrt{8/3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ e nenhum se $|c| \leq \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

30. Temos $f'(x) = c - g(x)$, com $g(x) = \frac{2x}{(x^2 + a^2)^2}$. Vamos achar o valor máximo de g :

$$g'(x) = \frac{2(x^2 + a^2)^2 - 2x \cdot 2(x^2 + a^2) \cdot 2x}{(x^2 + a^2)^4} = \frac{2(a^2 - 3x^2)}{(x^2 + a^2)^3}.$$

g cresce em $(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}})$, decresce fora desse intervalo e tende a 0 em $\pm\infty$. Seu valor máximo é

$$g\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2a/\sqrt{3}}{(4a^2/3)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{8a^3}.$$

- Se $c > \frac{3\sqrt{3}}{8a^3}$, então $f' > 0$ em toda parte, e f é crescente.
- Se $c = \frac{3\sqrt{3}}{8a^3}$, então $f' > 0$ exceto em $x = a/\sqrt{3}$; f é crescente em $(-\infty, \frac{a}{\sqrt{3}}]$ e em $[\frac{a}{\sqrt{3}}, \infty)$, logo em toda a reta.
- Se $c < \frac{3\sqrt{3}}{8a^3}$, então $f'(\frac{a}{\sqrt{3}}) < 0$, e f é decrescente perto desse ponto.

Portanto f é crescente em $(-\infty, \infty)$ se e somente se $c \geq \frac{3\sqrt{3}}{8a^3}$. No livro, $a^2 = 3$ e a condição é $c \geq \frac{1}{8}$.

31. Em $x = 1$ o numerador vale $1 - a + a - 1 = 0$, e o denominador também: é uma indeterminação do tipo 0/0. Pela Regra de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - ax + a - 1}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^{a-1} - a}{2(x - 1)}.$$

Ainda é do tipo 0/0. Aplicando a regra de novo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(a-1)x^{a-2}}{2} = \frac{a(a-1)}{2}.$$

- 32.** Quando $x \rightarrow a^+$, temos $x - a \rightarrow 0^+$ e $e^x - e^a \rightarrow 0^+$; os dois logaritmos tendem a $-\infty$. Como $\cos x \rightarrow \cos a$, basta calcular o limite do quociente dos logaritmos, do tipo ∞/∞ . Pela Regra de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1/(x - a)}{e^x/(e^x - e^a)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{e^x} \cdot \frac{e^x - e^a}{x - a} = \frac{1}{e^a} \cdot e^a = 1,$$

pois $\frac{e^x - e^a}{x - a}$ tende à derivada de e^x em a , que é e^a . Logo o limite pedido é $\cos a$.

- 33.** É uma indeterminação do tipo 1^∞ . Perto de 0 temos $\cos ax > 0$; seja $y = (\cos ax)^{1/x^2}$, de modo que

$$\ln y = \frac{\ln \cos ax}{x^2},$$

do tipo $0/0$. Pela Regra de l'Hôpital, duas vezes:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-a \operatorname{tg} ax}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-a^2 \sec^2 ax}{2} = -\frac{a^2}{2}.$$

(Se $a = 0$ não há indeterminação, e o resultado continua valendo.) Como a exponencial é contínua,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos ax)^{1/x^2} = e^{-a^2/2}.$$

- 34.** Fixe $t > 0$ e escreva $k = t\sqrt{g/m}$, de modo que

$$s = \frac{m \ln \cosh(k\sqrt{c})}{c}.$$

Quando $c \rightarrow 0^+$, $\cosh(k\sqrt{c}) \rightarrow 1$ e o numerador tende a 0: é uma indeterminação do tipo $0/0$. Derivando numerador e denominador em relação a c :

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} s = \lim_{c \rightarrow 0^+} m \frac{\sinh(k\sqrt{c})}{\cosh(k\sqrt{c})} \cdot \frac{k}{2\sqrt{c}} = \frac{mk}{2} \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cosh(k\sqrt{c})} \cdot \lim_{w \rightarrow 0^+} \frac{\sinh kw}{w},$$

em que $w = \sqrt{c}$. O primeiro limite vale 1. O segundo é do tipo $0/0$ e, pela Regra de l'Hôpital, vale $\lim_{w \rightarrow 0^+} k \cosh kw = k$. Portanto

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} s(t) = \frac{mk^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \frac{gt^2}{m} = \frac{gt^2}{2}.$$

Quando a resistência da água tende a zero, recuperamos a distância percorrida em queda livre, $\frac{1}{2}gt^2$.

- 35.** Em $x = a$, o numerador vale $\sqrt{2a^4 - a^4} - a\sqrt[3]{a^3} = a^2 - a^2 = 0$ e o denominador vale $a - \sqrt[4]{a^4} = 0$: é uma indeterminação do tipo $0/0$. Escrevendo $\sqrt[3]{aax} = a^{2/3}x^{1/3}$ e $\sqrt[4]{ax^3} = a^{1/4}x^{3/4}$, as derivadas em $x = a$ são

$$\frac{2a^3 - 4x^3}{2\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{a \cdot a^{2/3}}{3x^{2/3}} \Big|_{x=a} = \frac{-2a^3}{2a^2} - \frac{a}{3} = -\frac{4a}{3}, \quad -\frac{3a^{1/4}}{4x^{1/4}} \Big|_{x=a} = -\frac{3}{4}.$$

Como as derivadas são contínuas em a , a Regra de l'Hôpital dá

$$\lim_{x \rightarrow a} y = \frac{-4a/3}{-3/4} = \frac{16a}{9}.$$

- 36.** Coloque O na origem e $R = (r, 0)$. Então $P = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ e $Q = (r \cos \theta, 0)$. A área do segmento é a área do setor menos a do triângulo OPR , e o triângulo PQR tem base $QR = r - r \cos \theta$ e altura $PQ = r \sin \theta$:

$$A(\theta) = \frac{r^2 \theta}{2} - \frac{r^2 \sin \theta}{2} = \frac{r^2}{2}(\theta - \sin \theta), \quad B(\theta) = \frac{r^2}{2}(1 - \cos \theta) \sin \theta.$$

O quociente $\frac{A}{B} = \frac{\theta - \sin \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta}$ é do tipo $0/0$ quando $\theta \rightarrow 0^+$. Pela Regra de l'Hôpital:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta) \cos \theta}.$$

Usando $\sin^2 \theta = (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)$, o denominador é $(1 - \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta)$, e como $1 - \cos \theta \neq 0$ para θ pequeno, positivo:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2 \cos \theta} = \frac{1}{3}.$$

- 37.** Seja $t = 1/x$, de modo que $t \rightarrow 0^+$ quando $x \rightarrow \infty$. A expressão fica

$$\frac{a}{t} - \frac{\ln(1 + at)}{t^2} = \frac{at - \ln(1 + at)}{t^2},$$

uma indeterminação do tipo $0/0$. Pela Regra de l'Hôpital:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a - \frac{a}{1 + at}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a^2 t}{2t(1 + at)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a^2}{2(1 + at)} = \frac{a^2}{2}.$$

No livro, $a = 1$ e o limite é $\frac{1}{2}$.

- 38.** Reduzindo ao mesmo denominador, a expressão é

$$\frac{\sin kx + ax^3 + bx}{x^3},$$

do tipo $0/0$. Pela Regra de l'Hôpital, o limite é o mesmo de

$$\frac{k \cos kx + 3ax^2 + b}{3x^2},$$

desde que este exista (finito ou infinito). Se $k + b \neq 0$, o numerador tende a $k + b \neq 0$ e o denominador a 0^+ : o limite seria infinito. Logo é preciso $b = -k$. Então temos $0/0$ e, aplicando a regra mais uma vez:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \cos kx - k + 3ax^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-k^2 \sin kx + 6ax}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{k^2}{6} \cdot \frac{\sin kx}{x} + a \right) = -\frac{k^3}{6} + a.$$

Para que o limite seja 0, é preciso $a = k^3/6$. Resposta: $a = k^3/6$ e $b = -k$. No livro, $k = 2$: $a = \frac{4}{3}$ e $b = -2$.

- 39.** Fixado x , considere o quociente como função de h . Quando $h \rightarrow 0$, o numerador tende a $f(x) - 2f(x) + f(x) = 0$ e o denominador também: é do tipo $0/0$. Derivando em relação a h :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x + h) - f'(x - h)}{2h},$$

que ainda é do tipo 0/0, pois f' é contínua. Derivando de novo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) + f''(x-h)}{2} = \frac{2f''(x)}{2} = f''(x),$$

pela continuidade de f'' . Como o último limite existe, a Regra de l'Hôpital garante que os anteriores também existem e são iguais a ele.

40. (a) Pela definição,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h}.$$

Com $t = 1/h$, isso é $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t e^{-t^2} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{t}{e^{t^2}}$, do tipo ∞/∞ . Pela Regra de l'Hôpital, o limite é $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2t e^{t^2}} = 0$. Logo $f'(0) = 0$. Do mesmo modo, para cada inteiro $j \geq 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^j} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{t^j}{e^{t^2}} = 0,$$

aplicando a Regra de l'Hôpital repetidamente (cada aplicação baixa o grau de t no numerador e mantém e^{t^2} no denominador).

(b) Para $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3} f(x)$, logo a afirmação vale para $n = 1$ com $p_1 = 2$ e $k_1 = 3$ (e para $n = 0$ com $p_0 = 1$, $k_0 = 0$). Se $f^{(n)}(x) = p_n(x)f(x)x^{-k}$, com $k = k_n$, então

$$f^{(n+1)}(x) = p'_n f x^{-k} + p_n \frac{2f}{x^3} x^{-k} - k p_n f x^{-k-1} = \frac{x^3 p'_n(x) + 2p_n(x) - k x^2 p_n(x)}{x^{k+3}} f(x),$$

que tem a forma pedida, com $p_{n+1} = x^3 p'_n + 2p_n - k_n x^2 p_n$ e $k_{n+1} = k_n + 3$. Em $x = 0$, mostramos por indução que $f^{(n)}(0)$ existe e vale 0: se isso vale para n , então

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} p_n(h) \cdot \frac{f(h)}{h^{k_{n+1}}} = p_n(0) \cdot 0 = 0,$$

pelo item (a). Portanto f tem derivadas de todas as ordens em $\mathbb{R}$.

(c) Pelo item (b), $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n . Logo todos os coeficientes $c_k = f^{(k)}(0)/k!$ são nulos e todos os polinômios de Taylor de f centrados em 0 são identicamente nulos, embora $f(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Essa função é tão “achatada” em 0 que nenhum polinômio de Taylor a distingue da função nula: a série de Maclaurin de f não representa f .

41. (a) Temos $P(a) = A$, $P'(x) = B + 2C(x - a)$ e $P''(x) = 2C$. As condições dão

$$A = f(a), \quad B = P'(a) = f'(a), \quad 2C = f''(a),$$

$$\text{logo } P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2.$$

(b) Para $f(x) = \cos kx$: $f'(x) = -k \sin kx$ e $f''(x) = -k^2 \cos kx$. Em 0: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ e $f''(0) = -k^2$. Portanto

$$L(x) = 1, \quad P(x) = 1 - \frac{k^2 x^2}{2}.$$

A aproximação linear é a reta horizontal $y = 1$, que só acompanha o gráfico muito perto de 0. A parábola acompanha a curvatura do cosseno e é bem melhor. Por exemplo, para $k = 1$ e $x = 0,5$: $\cos 0,5 \approx 0,8776$, $P(0,5) = 0,875$ e $L(0,5) = 1$.

42. (a) Temos $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+b}}$ e $f''(x) = -\frac{1}{4(x+b)^{3/2}}$. Com $c = \sqrt{a+b}$:

$$L(x) = c + \frac{x-a}{2c}, \quad P(x) = c + \frac{x-a}{2c} - \frac{(x-a)^2}{8c^3}.$$

- (b) Para $b = 3$ e $a = 1$, $c = 2$, $L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-1)$ e $P(x) = L(x) - \frac{1}{64}(x-1)^2$. Em $x = 1,2$:

$$L(1,2) = 2,05, \quad P(1,2) = 2,049\,375, \quad f(1,2) = \sqrt{4,2} \approx 2,049\,390.$$

O erro de L é de cerca de 6×10^{-4} , e o de P , de cerca de $1,5 \times 10^{-5}$: a aproximação quadrática é muito melhor perto de a .

43. (a) A derivada de ordem k de $(x-a)^j$ é $j(j-1)\cdots(j-k+1)(x-a)^{j-k}$ se $j \geq k$, e é 0 se $j < k$. Em $x = a$, ela se anula, exceto quando $j = k$, caso em que vale $k!$. Assim, derivando T_n k vezes e fazendo $x = a$, sobra apenas o termo de grau k :

$$T_n^{(k)}(a) = k! c_k.$$

A condição $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ equivale, portanto, a $c_k = f^{(k)}(a)/k!$.

- (b) Para $f(x) = x^3$: $f(a) = a^3$, $f'(a) = 3a^2$, $f''(a) = 6a$ e $f'''(a) = 6$. Logo

$$T_3(x) = a^3 + 3a^2(x-a) + 3a(x-a)^2 + (x-a)^3 = [a + (x-a)]^3 = x^3,$$

pela fórmula do cubo da soma. O polinômio de Taylor de grau 3 de um polinômio de grau 3 é o próprio polinômio.

44. (a) As derivadas de $\cos x$ se repetem com período 4: $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, $\dots$. Em 0 os valores são 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1. Logo

$$T_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}.$$

- (b) As derivadas de ordem ímpar se anulam em 0 e a de ordem $2k$ vale $(-1)^k$. Logo

$$T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad \cos x : \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots.$$

Como o coeficiente de x^{2n+1} é $f^{(2n+1)}(0)/(2n+1)! = 0$, passar de T_{2n} para T_{2n+1} não acrescenta nada. Para ver a melhora com o grau, compare em $x = \pi$, onde $\cos \pi = -1$: $T_2(\pi) \approx -3,93$, $T_4(\pi) \approx 0,12$, $T_6(\pi) \approx -1,21$ e $T_8(\pi) \approx -0,98$.

- (c) Como $(\sin u)' = \cos u = \sin(u + \frac{\pi}{2})$, cada derivação multiplica por b e soma $\frac{\pi}{2}$ ao argumento:

$$g^{(k)}(x) = b^k \sin\left(bx + \frac{k\pi}{2}\right), \quad g^{(k)}(0) = b^k \sin \frac{k\pi}{2}.$$

Para k par, $g^{(k)}(0) = 0$; para $k = 2j+1$, $g^{(k)}(0) = (-1)^j b^{2j+1}$. A série de Maclaurin é

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j b^{2j+1} x^{2j+1}}{(2j+1)!} = bx - \frac{(bx)^3}{3!} + \frac{(bx)^5}{5!} - \dots,$$

isto é, a série de $\sin u$ com $u = bx$.

45. (a) Pela Regra da Cadeia, $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$, logo $f^{(n)}(0) = a^n$ e a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x^n}{n!} = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^3}{3!} + \cdots.$$

Para $a = 1$, obtemos a série de e^x : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$.

- (b) Para $n = 0$, $g(x) = x e^x = (x + 0)e^x$. Se $g^{(n)}(x) = (x + n)e^x$, então, pela Regra do Produto,

$$g^{(n+1)}(x) = e^x + (x + n)e^x = (x + n + 1)e^x,$$

o que completa a indução. Assim $g^{(n)}(0) = n$, e a série de Maclaurin é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots.$$

É exatamente x vezes a série de e^x : $x \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)$.